Turbulence : lois d'échelle, singularités et extrapolation asymptotique

Uriel Frisch

Réunion "Turbulence" de la section Sciences mécaniques et informatiques (20 janvier 2009)

Navier-Stokes : singularités ?

$$\partial_t \mathbf{u} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} = -\nabla p + \nu \nabla^2 \mathbf{u}$$

$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$, Navier–Stokes (1823)

+ conditions initiales et aux limites

$\Longrightarrow$ singularités ? (1 M \$)

Jean Leray (1934) : turbulence par les singularités ?

Turbulence développée : $Re = \frac{LV}{\nu} \to \infty$

Diffusion visqueuse négligeable (Euler)

sauf aux plus petites échelles.

"Anomalie dissipative" (la dissipation moyenne

a une limite positive pour $\nu \to 0$) ?

Fluide non visqueux (Euler) : ça explose ?

Cauchy :

$$D_t\omega \equiv \partial_t\omega + \mathbf{u}\cdot\omega = \omega\cdot\nabla\mathbf{u}$$

$$\omega \equiv \nabla\wedge\mathbf{u}\ .$$

Trichons :

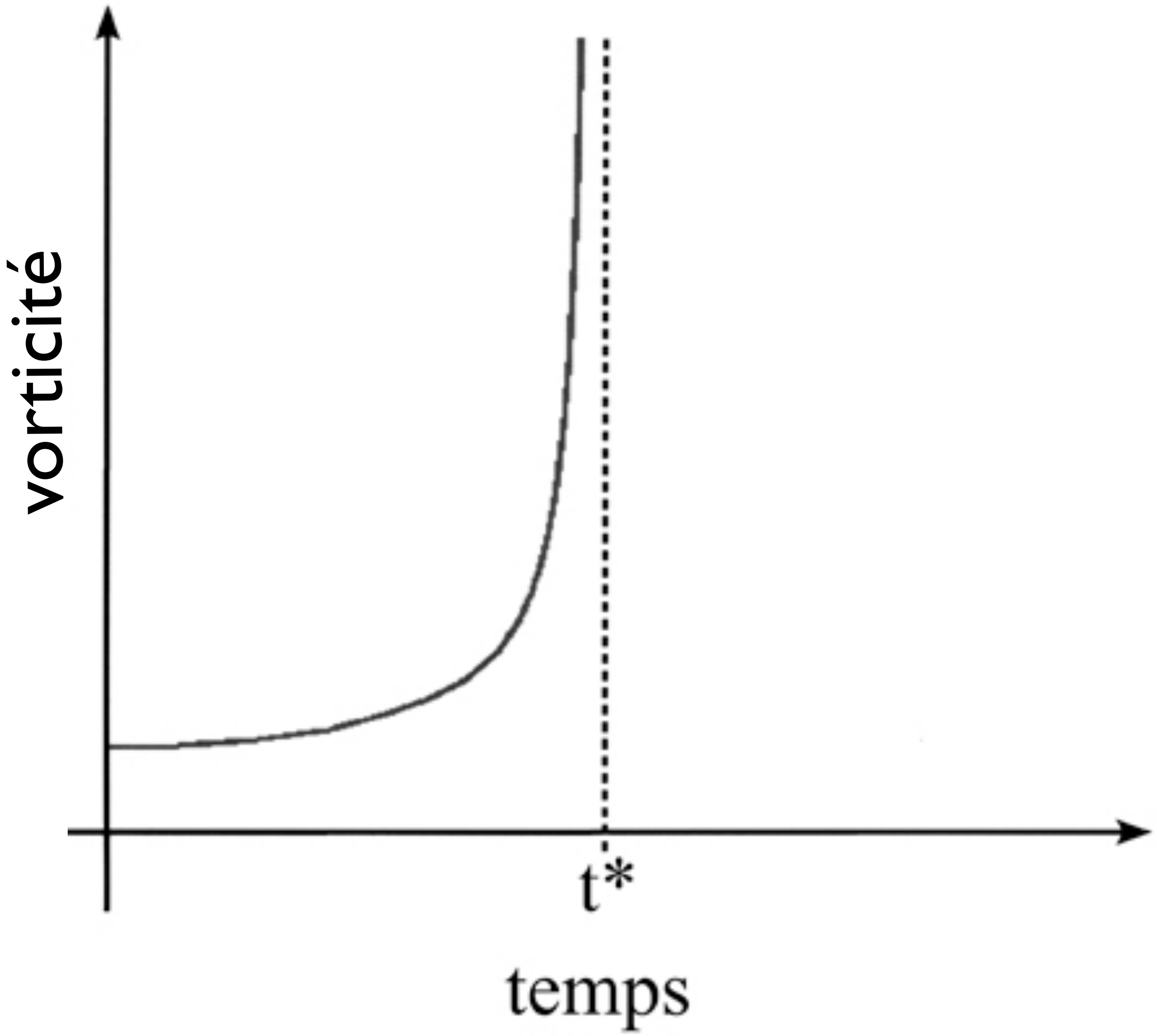
$$\nabla\mathbf{u} \approx \omega, \quad D_t\omega \approx \omega^2 \ \Rightarrow\ \text{Boum !}$$

Burgers 1D :

$$\partial_t u + u\partial_x u = 0$$

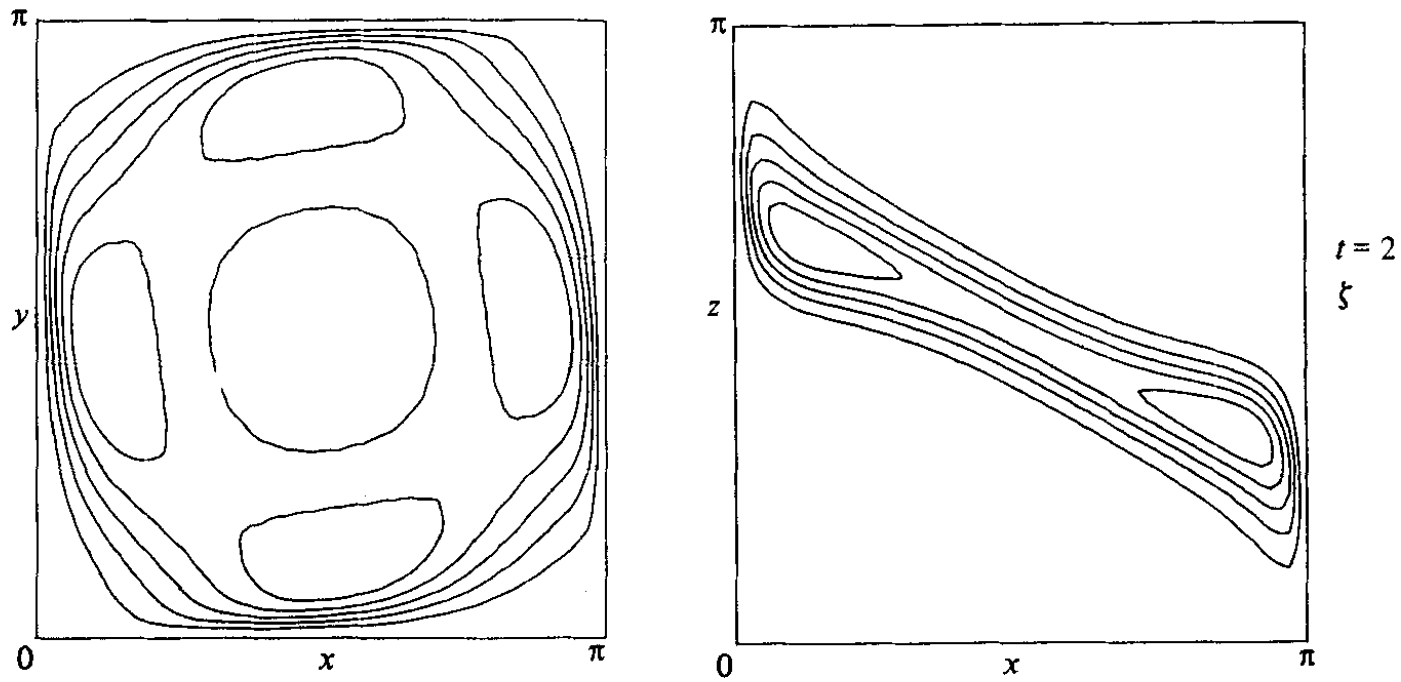
$$w \equiv -\partial_x u$$

$$D_t w = \partial_t w + u\partial_x w = w^2\ .$$

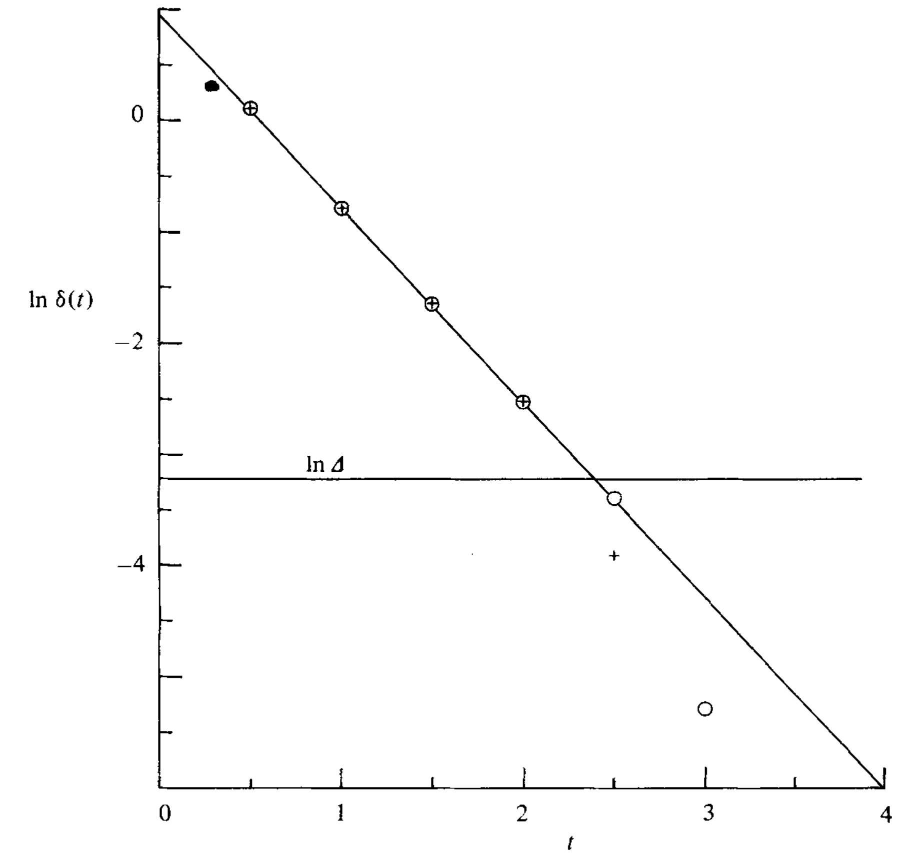


Euler 3D : la déplétion ralentit/empêche l'explosion

M.E. Brachet et al. J. Fluid Mech. **103** (1983) 411-452



Formation d'une crèpe de vorticité



La plus petite échelle diminue exponentiellement

Bardos, Benachour (1976-1979) : les singularités réelles sont précédées de singularités complexes

Peut-on identifier des singularités (réelles ou complexes) à partir de données de simulations ?

Extrapolation asymptotique

- Soit une fonction $G(k)$ au comportement asymptotique ($k \to \infty$)

$$G(k) \simeq Ck^{-\alpha}e^{-\delta k}$$

sur une grille régulière 1D $k_0, 2k_0, ..., Nk_0$

$$G_n = G(nk_0), \qquad n = 1, 2, ..., N$$

pouvons nous déterminer C, α et δ numériquement avec une haute précision ? *Quid* des termes sous-dominant?

- Méthode naïve : ajustement des moindres carrés

- Amélioration : rapports seconds (Shelley, Caflisch, Pauls–Matsumoto–Frisch–Bec)

$$R_n \simeq \frac{G_n G_{n-2}}{G_{n-1}^2} = \left(1 - \frac{1}{(n-1)^2}\right)^{-\alpha}$$

En ignorant les corrections sous-dominantes

$$\alpha = -\frac{\ln R_n}{\ln(1 - 1/(n-1)^2)}$$

- Y a-t-il une approche plus systématique ?

Extrapolation asymptotique de Joris van der Hoeven

J. van der Hoeven, Algorithms for asymptotic extrapolation, J. Symbolic Computation, sous presse

- Extrapoler la suite G_n dans la région “la plus asymptotique” $n = L, \ldots, N$
- Transformations :

  I Inverse: $G_n \longrightarrow \frac{1}{G_n}$

  R Rapport: $G_n \longrightarrow \frac{G_n}{G_{n-1}}$

  SR Rapport second: $G_n \longrightarrow \frac{G_n G_{n-2}}{G_{n-1}^2}$

  D Différence: $G_n \longrightarrow G_n - G_{n-1}$

- Descente (en supposant $G_n > 0$):
  - Test 1: si $G_n < 1$ appliquer **I**
  - Test 2: G_n croît-il plus vite que $n^{7/2}$?
    - Oui: si croissance exponentielle appliquer **SR**, sinon **R**
    - Non: appliquer **D**
  - Continuer jusqu’à obtention de données faciles à extrapoler et propres
- Remonter en inversant les transformations **I**, **R**, **SR** et **D**

Mise oeuvre/test pour l'équation de Burgers

Pauls-Frisch *J. Stat. Phys.* **127** (2007) 1095–1119

- Équation de Burgers inviscide

$$\partial_t u + u\,(\partial_x u) = 0, \qquad u(0,x) = u_0(x) = -\frac{1}{2}\sin x$$

- Représentation Fourier–Lagrangienne (Platzman, Fournier–Frisch)

$$u(t,x) = \sum_{k=\pm 1,\,\pm 2,\dots} e^{ikx}\hat{u}_k(t), \qquad \hat{u}_k(t) = -\frac{1}{2i\pi k t}\int_0^{2\pi} e^{-ik(a+tu_0(a))}\,da$$

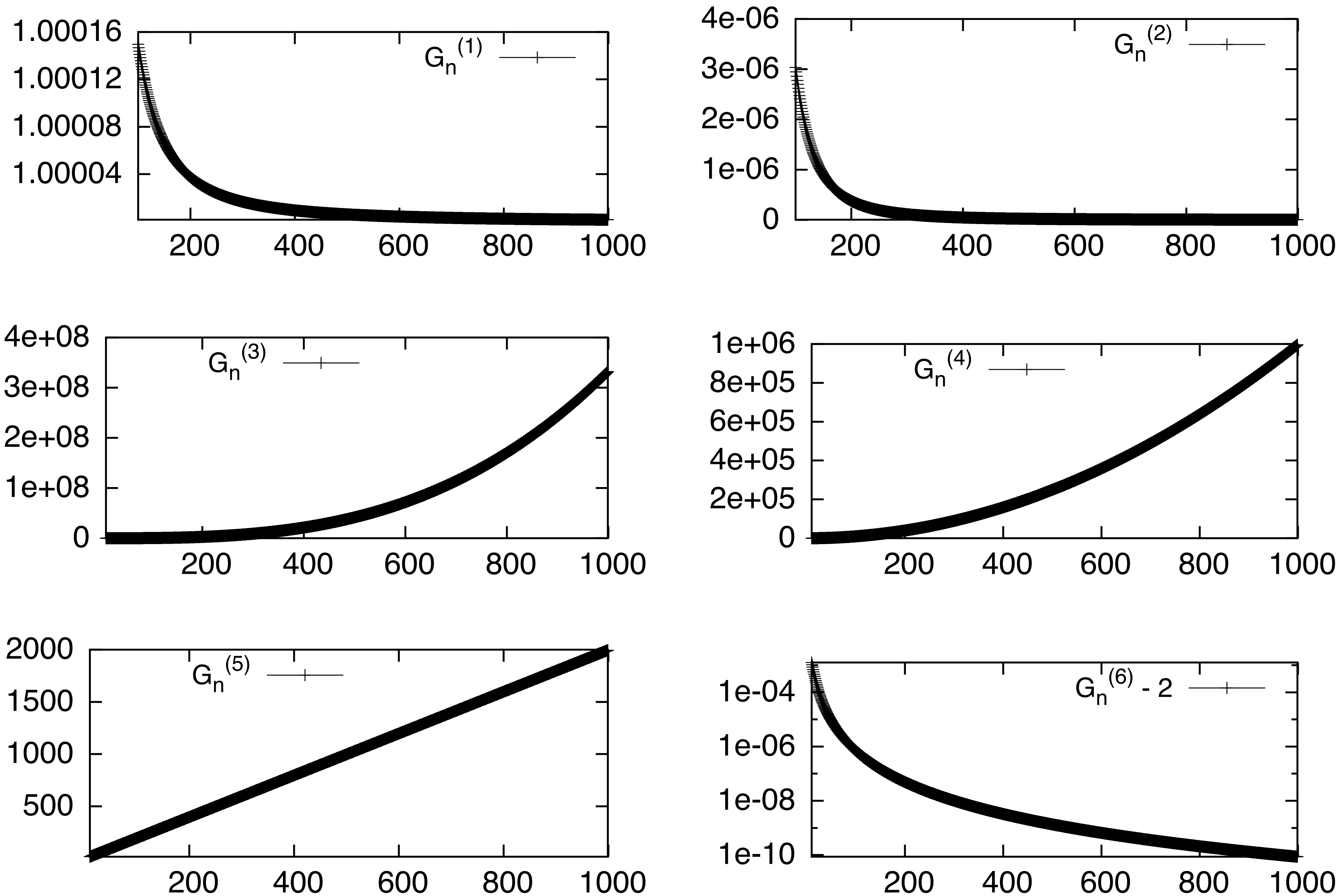
- Solution explicite $\hat{u}_k(t) = \frac{1}{ikt}J_k(kt/2)$ avec la fonction de Bessel J_k d'ordre k ce qui donne asymptotiquement (Debye)

$$\hat{u}_k(t) \sim \frac{1}{it}\frac{1}{\sqrt{2\pi\sqrt{1-(t/2)^2}}}k^{-\frac{3}{2}}e^{-k\left(\operatorname{arccosh}\frac{2}{t}-\sqrt{1-(t/2)^2}\right)}\left(1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\gamma_n\left(\frac{1}{\sqrt{1-(t/2)^2}}\right)}{k^n}\right),$$

les γ_n sont des polynômes connus (cf. Abramowitz–Stegun).

Un bon candidat pour tester l'extrapolation asymptotique: coefficients de Fourier calculés à haute précision (80 chiffres) à $t=1$ et $|k| \leq 1000$.

Six stades d'extrapolation



$$Ck^{-\alpha}e^{-\delta k} \xrightarrow{\mathbf{SR}} 1+\frac{\alpha}{k^2} \xrightarrow{-\mathbf{D}} \frac{2\alpha}{k^3} \xrightarrow{\mathbf{I}} \frac{k^3}{2\alpha} \xrightarrow{\mathbf{D}} \frac{3k^2}{2\alpha} \xrightarrow{\mathbf{D}} \frac{3k}{\alpha} \xrightarrow{\mathbf{D}} \frac{3}{\alpha}$$

Termes sous-dominants

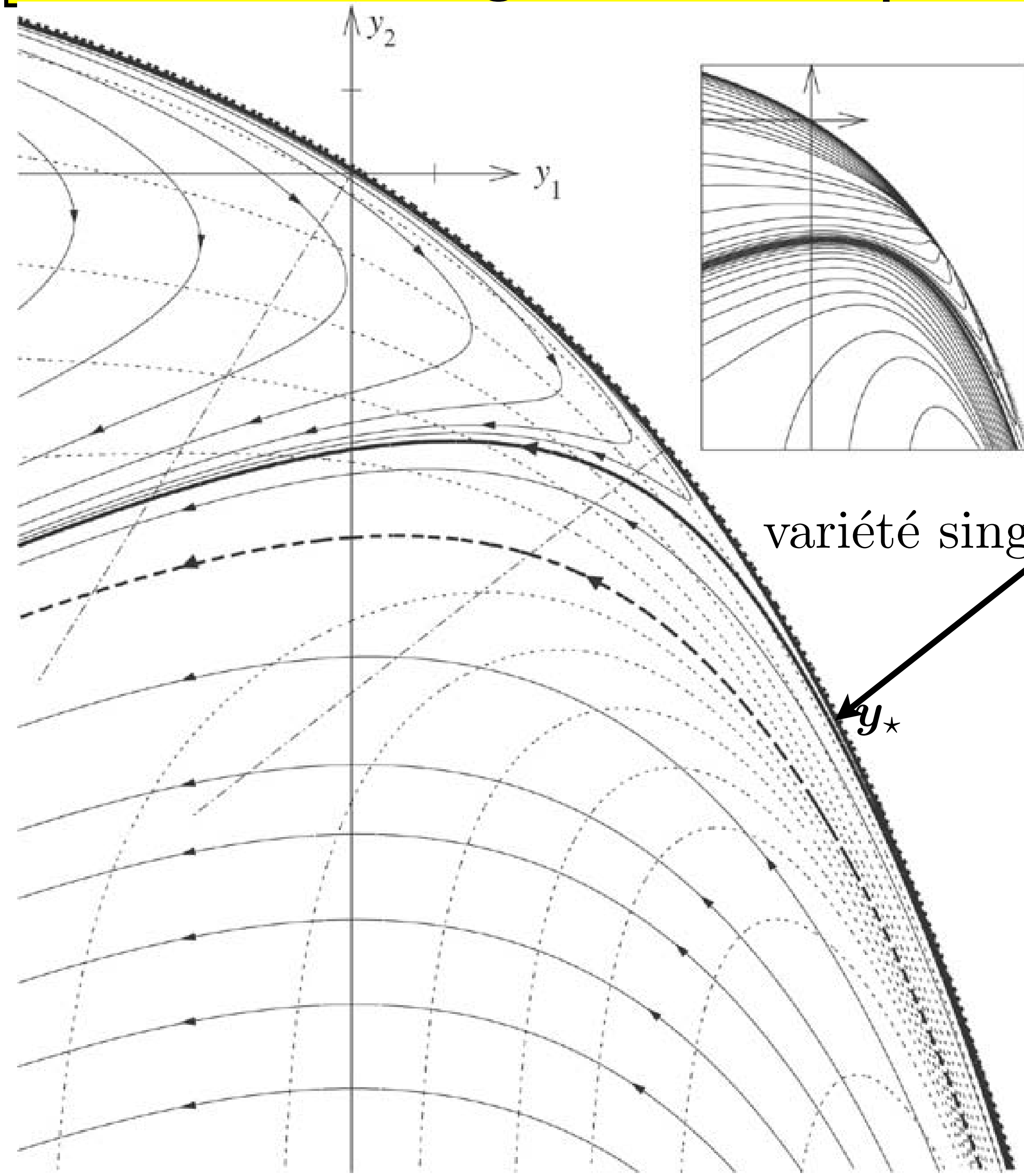
- La procédure d'extrapolation peut être continuée pour améliorer la précision sur α, δ et pour déterminer les termes sous-dominants
- Transformations appliquées

SR, -D, I, D, D, D, D, I, D, D, D, D, D

- Comparaison résultats théoriques et numériques

	α	δ	C
6 stades	1.49999999993	0.4509324931404	0.4286913791
13 stades	1.49999999999999995	0.450932493140378061868	0.4286913790524959
Val. théor.	3/2	0.450932493140378061861	0.42869137905249585643
	γ_1	γ_2	γ_3
6 stades	-0.17641252	0.17295	-0.401
13 stades	-0.17641258225238	0.172968106990	-0.406446182
Val. théor.	-0.176412582252385	0.1729681069958	-0.4064461802
	γ_4	γ_5	γ_6
13 stades	1.384160933	-6.192505762	34.5269751
Val. théor.	1.3841609326	-6.1925057618568063655	34.526975286449930956

Carte des singularités complexes (non universelles)



variété singulière

condition initiale

$$\Psi_0(x_1, x_2) = \frac{1}{2}\left(e^{-ix_1} + e^{-2ix_2}\right)$$

vorticité explose

loi d'échelle

$$|\omega| \sim |\boldsymbol{y} - \boldsymbol{y}_\star|^{-\beta}$$

$1/2 < \beta < 1$ dépend des conditions initiales

Pauls-Matsumoto-Frisch-Bec Physica D, **219** (2006) 40-59