КВАЗИЛИНЕЙНАЯ ТЕОРИЯ КОЛЕБАНИЙ ПЛАЗМЫ*

А. А. Веденов, Е. П. Велихов, Р. З. Сагдеев

Институт атомной энергии им. И. В. Курчатова, Академии Наук СССР

Москва, Союз Советских Социалистических Республик

Развивается метод исследования неравновесных процессов в системах с коллективными степенями свободы. Метод позволяет исследовать неравновесные состояния с сильно возбужденными (надтепловыми) колебаниями.

В применении к плазме метод заключается в том, что при рассмотрении неравновесных процессов учитывается воздействие самосогласованного поля колебаний на функцию распределения частиц. Функция распределения представляется в виде суммы медленно и быстро меняющихся частей. В уравнении для «медленной» функции распределения f_0 учитывается квадратичный усредненный эффект колебаний; для описания же самих колебаний используется обычная линейная теория, однако «фоном», на котором развиваются колебания, служит уже усредненная функция распределения f_0.

С помощью квазилинейного метода рассматривается задача о поглощении энергии волн конечной амплитуды в разреженной плазме. Показано, что для надтепловых колебаний затухание значительно уменьшается по сравнению с тем затуханием, которое дается обычной линейной теорией; величина декремента затухания при этом оказывается обратно пропорциональной плотности энергии волн ε. Выражение для декремента затухания γ, справедливое в области $\varepsilon \ll kT$, имеет вид:

$$\gamma = \gamma_0[1 + A\ (\varepsilon/kT)\ N_D]^{-1}$$

где $A \sim 1$, N_D — число частиц в шаре с радиусом, равным дебаевскому радиусу, а γ_0 — декремент, получающийся в линейной теории.

Приведенная формула для затухания применима лишь в случае достаточно «широкого» пакета волн: $\Delta v_\varphi > (e\varphi_0/m)^{1/2}$ (где Δv_φ — разброс фазовых скоростей в пакете, а φ_0 — амплитуда потенциала). В противоположном предельном случае монохроматической волны «декремент затухания» зависит от амплитуды как $\varepsilon^{-3/4}$. Такая зависимость осуществляется, например, при затухании осцилляций внутри фронта ударных волн в разреженной плазме без магнитного поля. Полученные результаты обсуждаются в связи с задачами диагностики и проблемой высокочастотного нагрева плазмы.

Исследуются колебательные процессы в неустойчивой плазме при не слишком большом удалении от границы устойчивости. В качестве примера находится стационарный спектр шумов в плазме, по которой протекает электрический ток, в условиях, когда имеет место ионная электростатическая неустойчивость. Найдена амплитуда стационарных колебаний. В случае, когда плазма находится в сильном магнитном поле и ток идет вдоль этого поля, форма спектра колебаний дается выражением: $\varepsilon_k \sim x^3\,(1-x^2)^{3/2}$, где ε_k — спектральная плотность энергии, $x = \omega_k/ks$, $s^2 = T_e/M$.

Обсуждаются пределы применимости развитой квазилинейной теории, нелинейные эффекты взаимодействия волн и переход к «турбулентному» режиму.

1. Введение

Характернейшей чертой плазмы является наличие семи ветвей спектра колебаний, обычно возбужденных значительно выше равновесного теплового уровня.

В настоящее время хорошо разработана лишь теория малых колебаний плазмы, основывающаяся на линеализованных уравнениях. Эта теория позволяет находить дисперсионные свойства плазмы для различного типа колебаний, а также условия, при которых последние самопроизвольно возрастают (неустойчивости плазмы). Однако, она не дает ответа на вопрос о том, до какой амплитуды раскачиваются колебания и как они влияют на процессы переноса в плазме — важнейший вопрос, возникающий в проблеме магнитной термоизоляции плазмы.

С другой стороны, нелинейные движения плазмы исследовались лишь в ряде частных случаев, при некоторых упрощающих предположениях. Так, например, рассматривались установившиеся плоские волны, когда остается зависимость лишь от одной пространственной координаты. Эти частные решения тем не менее показывают, что даже при малых, но конечных амплитудах, явления протекают иначе, чем их описывает линеаризованная теория. Так обстоит дело с затуханием Ландау, предсказываемым линеаризованной теорией и отсутствующим при нелинейном рассмотрении установившихся волн в плазме без столкновений. Причина этого, как известно, заключается в следующем: ответственными за поглощение волн в плазме являются частицы (ионы, электроны), находящиеся в резонансе с волной; даже при малых амплитудах распределение *из-за* обратного воздействия

* Доклад CN-10/199, представленный на Конференцию. Докладчик: Е. П. Велихов. Дискуссия (на английском языке) по этому докладу дана на стр. 493. Переводы аннотаций находятся в конце этого тома Трудов Конференции.

поля волны будет с течением времени сильно искажаться, чего не учитывает линейная теория. Естественно, что это обратное воздействие играет не меньшую роль и при раскачке колебаний в неустойчивой плазме.

2. Общий формализм квазилинейной теории

Итак, описание явлений при малых, но конечных амплитудах требует учета обратного воздействия колебаний на распределение частиц в пространстве скоростей.

Этот учет можно провести в рамках «квазилинейной» теории, изложению которой и посвящена настоящая статья. В квазилинейном приближении функция распределения частиц по скоростям представляется в виде суммы двух частей: $f_0(\mathbf{v}, t)$ — медленно меняющейся (мы будем называть ее «фоном») и $f_1(\mathbf{v}, t)$ — быстро меняющейся*. Медленное изменение «фона» вследствие обратного воздействия колебаний на частицы обусловлено усредненными квадратичными эффектами малых быстрых осцилляций. В этом смысле здесь имеет место аналогия с известным методом Ван-дер-Поля в нелинейной механике.

Существенно то обстоятельство, что квазилинейное приближение не учитывает взаимодействия между различными «гармониками» и «модами». Поэтому баланс энергии в $\mathbf{k}$-ой гармонике колебаний ($\mathbf{k}$ — волновой вектор) определяется, как и в линейной теории, уравнением $\mathrm{d}\varepsilon_k/\mathrm{d}t = 2\gamma\{f_0\}\varepsilon_k$, где γ — мнимая часть частоты, являющаяся функционалом «фона» f_0.

В качестве простейшего примера выведем уравнение квазилинейной теории для продольных электронных лэнгмюровских колебаний разреженной полностью ионизованной высокотемпературной плазмы. Для описания процессов в такой плазме можно, как известно, пользоваться кинетическим уравнением с самосогласованным полем E, пренебрегая эффектами столкновения частиц друг с другом:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + v\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{eE}{m}\frac{\partial f}{\partial v} = 0 \tag{1 a}$$

$$\frac{\partial E}{\partial x} = 4\pi Ne\left(\int f\,\mathrm{d}v - 1\right). \tag{1 b}$$

Разбивая функцию распределения на медленно и быстро меняющуюся части

$$f = f_0 + f_1,$$

(так что среднее значение быстро осциллирующей части равно нулю, $\langle f_1\rangle = 0$ и, следовательно, $\langle f\rangle = f_0$) и полагая

$$f_1 = \frac{1}{\sqrt{V}}\sum_k (f_k\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx - \mathrm{i}\omega_k t} + \text{c. c.})$$

$$E = \frac{1}{\sqrt{V}}\sum_k (E_k\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx - \mathrm{i}\omega_k t} + \text{c. c.}) \tag{2}$$

получим, приравнивая справа и слева в уравнениях (1) осциллирующие члены, соотношение между f_1 и E:

$$f_k = \frac{e}{m}\,\frac{1}{\mathrm{i}(\omega_k - kv)}\,\frac{\partial f_0}{\partial v}E_k \tag{3}$$

и обычные выражения для действительной и мнимой части ω_k, следующие из линейной теории,

$$\operatorname{Re}\omega_k = \Omega_k\{f_0\} \tag{4 a}$$

$$\operatorname{Im}\omega_k = \gamma_k\{f_0\}. \tag{4 b}$$

Уравнение для медленно меняющейся части функции распределения f_0 мы получим, подставляя выражение (2) для E и f_1 в (1а) и производя усреднение:

$$\frac{\partial\langle f\rangle}{\partial t} + v\frac{\partial\langle f\rangle}{\partial x} + \left\langle\frac{eE}{m}\frac{\partial(f_0 + f_1)}{\partial v}\right\rangle = 0. \tag{5}$$

Для дальнейшего существенно отметить следующее: мы будем предполагать, что в плазме имеется одновременно много волн с различными волновыми векторами и хаотически распределенными фазами; таким образом, будут рассматриваться волновые пакеты достаточно большой ширины, чтобы можно было пренебречь захватом частиц в «потенциальные ямы» отдельных гармоник пакета. В рассматриваемом случае продольных лэнгмюровских колебаний для этого необходимо, чтобы разброс фазовых скоростей ω/k волн в пакете значительно превышал ту скорость, с которой захваченная волной частица двигалась бы в «потенциальной яме» $e\varphi_0$:

$$\Delta\left(\frac{\omega}{k}\right) \gg \left(\frac{e\varphi_0}{m}\right)^{1/2}. \tag{6}$$

Если условие (6) выполнено, и, следовательно, захваченные частицы отсутствуют, то мы можем считать усредненную функцию распределения $\langle f\rangle = f_0$ однородной в пространстве, так что $\partial\langle f\rangle/\partial x = 0$. Учитывая, что $\langle Ef_0\rangle = \langle E\rangle f_0 = 0$, получаем из (5) следующее уравнение для «фона» f_0:

$$\frac{\partial f_0}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial v}D\frac{\partial f_0}{\partial v}, \tag{7}$$

где «коэффициент диффузии в пространстве скоростей» D пропорционален квадрату электрического поля волн:

$$D = \frac{e^2}{m^2}\sum_{kk'}\left\langle(E_{k'}\mathrm{e}^{\mathrm{i}k'x - \mathrm{i}\omega_{k'}t} + \text{c. c.}) \times \left(\frac{E_k}{\mathrm{i}(\omega_k - kv)}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx - \mathrm{i}\omega_k t} + \text{c. c.}\right)\right\rangle$$
$$= \frac{e^2}{m^2}\,2\pi\sum_k |E_k|^2\,\delta(\omega_k - kv). \tag{8}$$

С другой стороны, скорость изменения энергии волн в спектральном интервале $(k, k + \mathrm{d}k)$ определяется формулой (4b), которая в случае длин-

* В линейной теории f_0 считается заданной функцией.

новолновых ($kR_D \ll 1$) электронных лэнгмюровских колебаний имеет вид:*

$$\frac{1}{|E_k|^2}\frac{\mathrm{d}\,|E_k|^2}{\mathrm{d}t} = 2\gamma_k\{f_0\} = \frac{\pi\omega^3}{k^2}\left(\frac{\partial F}{\partial v_{\parallel}}\right)_{v_{\parallel}=\omega/k} \quad (9)$$

где $F(v_{\parallel}) = \int f_0\,\mathrm{d}\mathbf{v}_{\perp}$ — распределение электронов по скорости, параллельной направлению распространения волны. Система уравнений квазилинейной теории (7), (8), (9) является замкнутой; она описывает обратное влияние лэнгмюровских колебаний на функцию распределения частиц. Следует сразу же заметить, что уравнение типа (7) имеет смысл рассматривать лишь в том случае, когда амплитуда колебаний значительно больше амплитуды тепловых шумов плазмы в соответствующем участке спектра, поскольку учет тепловых шумов фактически, как показано в [1], приводит лишь к изменению величины под знаком логарифма в кулоновском члене столкновений (что является превышением точности).

В тех случаях, когда это необходимо, учет столкновений производится нами лишь с логарифмической точностью. Поэтому эффектом тепловых шумов, плотность энергии которых по порядку величины равна NT/N_D, где N_D — число частиц в шаре дебаевского радиуса R_D, мы пренебрегаем, ограничиваясь изучением сильно «надтепловых» колебаний, плотность энергии которых $\varepsilon \gg NT/N_D$.

Следует отметить также то обстоятельство, что область применимости уравнений квазилинейной теории ограничена случаями, когда инкремент (или декремент) колебаний значительно меньше их частоты; если же это условие не выполнено, то разделение функции распределения на быстро осциллирующую и медленно меняющуюся части невозможно и уравнения типа (7), (8), (9) несправедливы.

Из вида уравнения (7) для усредненной функции распределения частиц f_0 ясно, что при возбуждении коллективных степеней свободы — волн — в плазме появляется кроме обычной «столкновительной» дополнительная диффузия в пространстве скоростей. Интересно, что отношение коэффициента «диффузии на волнах» D к коэффициенту «столкновительной диффузии» $D_0 \sim Ne^4/mv$ (где v — средняя тепловая скорость электронов)

$$\frac{D}{D_0} \sim \frac{\omega_e E^2/mN}{Ne^4/mv} \sim \frac{E^2/N}{e^2/R_D} \sim \frac{E^2}{NT}\cdot N_D, \quad (10)$$

(где $N_D \sim NR_D^3$ — число частиц в шаре дебаевского радиуса R_D) по порядку величины равно отношению энергии волн (в расчете на одну частицу) E^2/N к энергии электростатического взаимодействия (также на одну частицу) e^2/R_D*. Таким образом, эффекты взаимодействия частиц с возбужденными коллективными степенями свободы проявляются тем сильнее, чем меньше неидеальность системы.

* При $kR_D \ll 1, \omega \approx \Omega_k = [\omega_e^2 + 3(T/m)k^2]^{1/2}$, $\omega_e^2 = 4\pi Ne^2/m$

** Последняя величина — известная «дебаевская поправка» к термодинамическим потенциалам кулоновской системы.

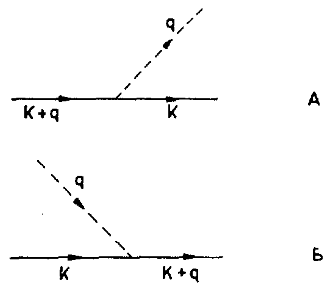

Рис. 1 Излучение (А) и поглощение (Б) волны частицей.

Для того, чтобы выяснить физический смысл квазилинейной теории и обобщить полученные уравнения (7)—(9) на случай произвольной системы с сильно возбужденными коллективными степенями свободы, будем рассматривать такую систему как совокупность двух газов — газа частиц и газа волн — и напишем уравнения сохранения частиц и волн в фазовом пространстве.

Рассмотрим сначала уравнение баланса числа частиц в пространстве скоростей (предполагая, что в координатном пространстве система однородна). Поскольку коллективные моды сильно возбуждены (так что плотность газа волн значительно превышает свое термодинамически равновесное значение), то мы можем учесть, в первом приближении, лишь процессы взаимодействия частиц с волнами. Основным процессом, влияние которого мы должны рассмотреть, является процесс «первого порядка»*: излучение или поглощение волны $\mathbf{q}$ частицей $\mathbf{k}$ (рис. 1).

Матричные элементы процессов 1А, 1Б пропорциональны, соответственно, $\sqrt{N_q}$ и $\sqrt{N_q+1}$, где N_q — число волн в единице объема фазового пространства;** однако в нашем случае $N_q \gg 1$, и, следовательно, вероятность обоих процессов одинакова и пропорциональна N_q:

$$W(k,q) = N_q W_{k,k+q}\,\delta(\varepsilon_i - \varepsilon_f)$$
$$(W_{k,k+q} = W_{k+q,k}). \quad (11)$$

В результате излучения или поглощения волн частица меняет свой импульс и переходит в другую точку фазового пространства; изменение числа частиц в точке $\mathbf{k}$ фазового пространства складывается из „членов ухода“ вследствие поглощения

$$-\int \mathrm{d}q\, f_k N_q W_{k,k+q}\,\delta(\varepsilon_k + \hbar\omega_q - \varepsilon_{k+q}) \quad (12а)$$

* Само описание возбужденных состояний системы с помощью двух газов — частиц и волн — предполагает малость взаимодействия между ними. Поэтому можно считать, что процессы высших порядков играют меньшую роль, чем процессы первого порядка по взаимодействию частиц с волнами. В частности, для таких систем с кулоновским взаимодействием, как разреженная плазма или сверхплотная электронная плазма, взаимодействие частиц с волнами имеет электродинамическую природу и пропорционально заряду частицы; слабость взаимодействия частиц с волнами связана в этом случае с малостью параметра $(e^2/\langle\varepsilon\rangle)/r$ (где $\langle\varepsilon\rangle$ — средняя энергия частиц, а r — среднее расстояние между ними), пропорционального квадрату заряда.

** Мы считаем, что волны подчиняются статистике Бозе.

и излучения

$$-\int \mathrm{d}q\, f_k N_q W_{k,k-q}\, \delta(\varepsilon_k - \hbar\omega_q - \varepsilon_{k-q}) \qquad (12\,б)$$

и из аналогичных «членов прихода» из-за поглощения

$$+\int \mathrm{d}q\, f_{k-q} N_q W_{k-q,k}\, \delta(\varepsilon_{k-q} + \hbar\omega_q - \varepsilon_k) \qquad (12\,в)$$

и излучения

$$+\int \mathrm{d}q\, f_{k+q} N_q W_{k+q,k}\, \delta(\varepsilon_{k+q} - \hbar\omega_q - \varepsilon_k). \qquad (12г)$$

Здесь f_k — функция распределения (диагональная часть матрицы плотности в k — представлении частиц), ε_k — кинетическая энергия частицы с волновым вектором $\mathbf{k}$, ε_q — энергия волны q.

Суммируя вклады различных процессов (12), получим для функции распределения частиц f_k уравнение

$$\frac{\partial f_k}{\partial t} = \int \mathrm{d}q\, N_q (\Psi_{k+q,q} - \Psi_{k,q}) \qquad (13\,а)$$

$$\Psi_{k,q} = (f_k - f_{k-q})\, W_{k,k-q}\, \delta(\varepsilon_k - \varepsilon_{k-q} - \hbar\omega_q). \qquad (13\,б)$$

Получим теперь аналогичным образом уравнение для функции распределения волн N_q. Изменение N_q происходит в результате рождения и уничтожения волн частицами,* так что в пространственно однородном случае ($\partial/\partial x = 0$)

$$\frac{\partial N_q}{\partial t} = -\int N_q W_{k,k+q} f_k\, \delta(\varepsilon_k + \hbar\omega_q - \varepsilon_{k+q})\,\mathrm{d}k + \int N_q W_{k+q,k} f_{k+q}\, \delta(\varepsilon_{k+q} - \hbar\omega_q - \varepsilon_k)\,\mathrm{d}k = N_q \int \Psi_{k+q,q}\,\mathrm{d}k. \qquad (14)$$

Уравнения (13) — (14) описывают неравновесные процессы в системах с сильно возбужденными коллективными степенями свободы (в случае, когда отсутствуют внешние силы $\mathbf{F}$ и нет пространственных градиентов**).

Если относительное изменение импульса частицы при рождении или уничтожении волны мало,

$$\frac{q}{k} \ll 1 \qquad (15)$$

то уравнение баланса частиц (13) принимает фоккер-планковский вид: действительно, разлагая в (13) функцию Ψ и разность $\Psi_{k+q,q} - \Psi_{k,q}$ по q, получаем

$$\Psi_{k,q} = q\frac{\partial f_k}{\partial k} W_{k,k-q}\, \delta\left(\frac{\hbar k q}{m} - \hbar\omega_q\right) \qquad (16)$$

и

$$\frac{\partial f_k}{\partial t} = \int \mathrm{d}q\, N_q \cdot q \frac{\partial}{\partial k}\left\{W_{k,k-q}\, \delta\left(\frac{\hbar k}{m} q - \hbar\omega_q\right) q \frac{\partial f_k}{\partial k}\right\}, \qquad (17)$$

* Здесь мы опять учитываем лишь процессы первого порядка и считаем $N_q \gg 1$.

** Для обобщения на случай $\mathbf{F} \neq 0$; $\partial/\partial x \neq 0$ достаточно заменить в левых частях уравнений (13а) и (14) частные производные $\partial f/\partial t$ на полные: $\mathrm{d}f/\mathrm{d}t = \partial f/\partial t + [\mathscr{H} f]$.

т.е. уравнение Фоккер-Планка. В этом же приближении уравнение для N_q можно записать следующим образом:

$$\frac{\partial N_q}{\partial t} = N_q \int \mathrm{d}k\, W_{k,k-q}\, \delta\left(\frac{\hbar k}{m} - \hbar\omega_q\right) q \frac{\partial f_k}{\partial k}. \qquad (18)$$

В частности, для системы частиц с кулоновским взаимодействием — плазмы — относительное изменение импульса электрона при рождении (поглощении) кванта лэнгмюровских колебаний не превышает величины $\hbar\omega_p/\langle\varepsilon\rangle$ и мало в случае разреженной и сверхплотной плазмы, поэтому здесь применимы уравнения (17) — (18); в разреженной плазме

$$W_{k,k-q} = 4\pi^2 e^2 \frac{\hbar\omega_q}{q^2}$$

и (17) совпадает с выведенным ранее уравнением (7), а (18) переходит в обычную формулу линейной теории для инкремента (декремента) волн в плазме (9).

В случае произвольной системы с возбужденными коллективными модами уравнение баланса частиц не имеет Фоккер-Планковского вида; в настоящей работе мы рассмотрим лишь вопросы квазилинейной теории плазмы и поэтому будем пользоваться уравнениями типа (17)—(18) [или (7), (8), (9)].

Способом, использованным при выводе системы уравнений квазилинейной теории (7), (8), (9), можно получить аналогичные уравнения для плазмы в магнитном поле (см., напр., [2]); однако в этой работе мы не будем рассматривать общего случая, а ограничимся анализом ряда конкретных эффектов: развитие колебаний в неустойчивой плазме, поглощение в плазме волн конечной амплитуды и т.п.

3. Развитие неустойчивости

В этом разделе мы рассмотрим в рамках квазилинейной теории задачу о развитии неустойчивости в разреженной плазме. Ограничимся исследованием неустойчивости на лэнгмюровской ветви плазменных колебаний и будем считать, для простоты, задачу одномерной (функция распределения зависит лишь от проекции скорости частиц на одно выделенное направление и продольные лэнгмюровские колебания также происходят в этом направлении).*

Предположим, что в начальный момент времени распределение частиц в пространстве скоростей $f(0, v)$ имеет вид, изображенный на рис. 2А.; тогда в области, где производная $\partial f(0, v)/\partial v$ положительна, начинают раскачиваться лэнгмюровские колебания; спектральная плотность энергии этих колебаний растет по закону, см. (9):

$$\frac{\partial |E_k|^2}{\partial t} = |E_k|^2 \frac{\pi\omega^3}{k^2} \left.\frac{\partial f}{\partial v}\right|_{v=\omega/k}. \qquad (19)$$

* Такая ситуация возникает, например, при наличии сильного магнитного поля, которое и выделяет это направление.

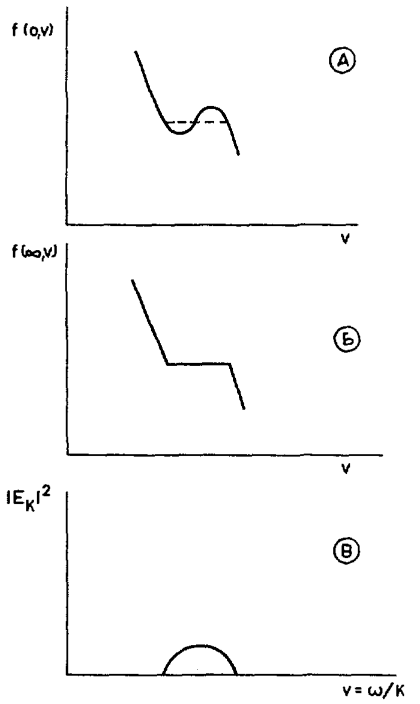

Рис. 2 Образование «плато» на функции распределения частиц (А—Б) и спектр колебаний при $t\to\infty$ (В).

Появление в плазме надтепловых шумов приводит, в свою очередь, к возникновению диффузии частиц в скоростном пространстве:

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial v} D \frac{\partial f}{\partial v} \tag{20}$$

причем коэффициент диффузии D (t, v) связан в рассматриваемом случае с квадратом поля колебаний соотношением:

$$D = 2\pi \frac{e^2}{m^2} \int |E_k|^2 \delta(\omega - kv) \frac{dk}{2\pi} = \frac{e^2}{m^2} |E_k|^2 \frac{1}{v}, \tag{21}$$

поскольку в рассматриваемом здесь случае длинных волн частота ω совпадает с плазменной частотой $(4\pi N e^2 m)^{1/2}$ и, следовательно, скорость резонансных частци обратно-пропорциональна волновому вектору: $v=\omega/k$.

В результате диффузии начальное распределение частиц сглаживается и в области скоростей $v_1<v<v_2$ появляется «плато» (рис. 2Б) [3]. В то же время в области волновых чисел $\omega/v_2<k<\omega/v_1$ устанавливается стационарный* спектр надтепловых шумов. Форму этого стационарного спектра и величину спектральной плотности энергии можно найти следующим образом.

Интегрируя (19) по времени и пренебрегая энергией тепловых шумов по сравнению с энергией раскачивающихся колебаний, находим спектральную плотность $|E_k|^2(t)$ надтепловых шумов:

$$|E_k|^2(t) = \frac{\pi\omega^3}{k^2} \int_0^t dt\, |E_k|^2 \frac{\partial f}{\partial v}. \tag{22}$$

С другой стороны, интегрируя (20) по времени и по скорости v в пределах от v_1 до v, используя (21) и учитывая еще, что при $v=v_1$ $D\partial f/\partial v=0$, получаем:

$$\int_{v_1}^{v} [f(t,v') - f(0,v')]\, dv' = \frac{e^2}{m^2}\frac{1}{v}\int_0^t |E_k|^2 \frac{\partial f}{\partial v}\, dt. \tag{23}$$

Сравнивая (22) с (23), находим спектральную плотность шумов:

$$|E_k|^2(t) = \frac{\pi m^2}{e^2}\omega v^3 \int_{v_1}^{v} [f(t,v') - f(0,v')]\, dv'. \tag{24}$$

По окончании процесса выравнивание функции распределения, когда в области $v_1<v<v_2$ устанавливается плато f $(\infty, v)=\mathrm{const}$, искомый стационарный спектр надтепловых лэнгмюровских колебаний полностью определяется начальной и конечной функциями распределения:

$$|E_k|^2(\infty) = \frac{\pi m^2}{e^2}\omega v^3 \int_{v_1}^{v} [f(\infty,v') - f(0,v')]\, dv', \tag{25}$$

(вид этого спектра приведен на рис. 2А). Как следует из (25), спектральная плотность шумов обращается в нуль в точках $k_1=\omega/v_1$ и $k_2=\omega/v_2$*, а ее детальная зависимость от k определяется конкретным видом начальной функции распределения частиц по скоростям.

Возникающее в результате развитие неустойчивости и диффузии плазма с «плато» на электронном распределении обладает тем свойством, что возбуждаемые из вне продольные лэнгмюровские волны могут распространяться в ней без затухания, если их фазовая скорость v_f лежит в области плато $v_1<v_f<v_2$.

Плотность энергии надтепловых шумов, устанавливающихся по окончании процесса диффузии, по порядку величины равна

$$E^2 = \int 2|E_k|^2 dk(2\pi)^{-1} \sim \delta n(mv_2^2 - mv_1^2), \tag{26}$$

где δn — плотность той части электронов, которые диффундируют в пространстве скоростей в резуль-

* Производная по скорости от функции распределения в области плато обращается в нуль, так что колебания не возрастают и не затухают.

* Интеграл в правой части (25) обращается в нуль при $v=v_2$ в силу закона сохранения числа частиц:

$$\int_{v_1}^{v_2} f(0,v')\, dv' = \int_{v_1}^{v_2} f(\infty,v')\, dv'$$

тате испускания и поглощения коллективных лэнгмюровских колебаний, постепенно изменяя свою кинетическую энергию.

Мы видим, таким образом, что изложенная выше квазилинейная теория позволяет ответить на вопрос о том, в какое состояние переходит неустойчивая в начальный момент плазма в результате развития в ней кинетической неустойчивости, и каковы функция распределения частиц и спектр коллективных колебаний в конечном состоянии. При этом оказывается, что в разреженной плазме релаксационный процесс в пространстве скоростей имеет две стадии: сначала функция распределения частиц $f(v)$ быстро выравнивается вблизи области, где имелась положительная производная $\partial f/\partial v$, и лишь затем, гораздо медленнее, функция распределения стремится к термодинамически равновесной. Квазилинейная теория описывает именно первую стадию — установление «плато» на функции распределения и возникновения надтепловых шумов. Если ширина «плато» невелика, то система уравнений (19)—(21), описывающих этот процесс, может быть приведена к следующему одному уравнению для коэффициента диффузии D:

$$\frac{\partial D}{\partial t} = D\frac{\partial^2 D}{\partial v^2} + \Phi \cdot D \tag{27}$$

причем функция Φ зависит только от скорости v и с точностью до множителя совпадает с производной $\partial f/\partial v$ в начальный момент времени

$$\Phi(v) = \pi\omega v^3\, \partial f(0, v)/\partial v\,. \tag{28}$$

Заметим, что стационарное решение уравнения (27), которое можно получить, положив в нем $\partial/\partial t = 0$, приводит с учетом (28) к формуле для спектральной плотности надтеплового шума (25).

С помощью (27) можно исследовать весь процесс развития колебаний в неустойчивой в начальный момент времени плазме и установление плато на функции распределения частиц $f(v)$. Длительность всего этого процесса τ по порядку величины равна

$$\tau \sim \frac{(v_2 - v_1)^2}{D(\infty)} \sim \left(\frac{v_2 - v_1}{\sqrt{T_e/m}}\right)^2 \cdot \frac{n}{\delta n}\,\frac{T/m}{(v_2 + v_1)^2}\,\frac{1}{\omega_e}\,. \tag{29}$$

4. Поглощение волн в плазме

Как известно, линейная теория малых колебаний разреженной плазмы предсказывает наличие «бесстолкновительного затухания» волн, распространяющихся в плазме. Типичным примером такого «бесстолкновительного затухания» является уменьшение амплитуды продольных электронных лэнгмюровских волн, возбуждаемых на границе плазмы внешним электрическим полем частоты $\omega > \omega_e$ и распространяющихся вглубь плазмы перпендикулярно границе. Для длинноволновых колебаний ($k R_D \ll 1$), которые мы только и будем рассматривать, падение амплитуды волны по мере прохождения вглубь плазмы дается следующим выражением:*

$$\frac{|E_k|^{2\prime}}{|E_k|^2} = \frac{\pi}{3}\,\frac{{\omega_e}^4}{k^3}\,\frac{m}{T}\left(\frac{\partial f}{\partial v}\right)_{v=\omega/k} \tag{30}$$

здесь ω_e — плазменная частота, k — волновой вектор, $f(v)$ — функция распределения электронов по компоненте скорости, параллельной направлению распространения волн, а штрих означает дифференцирование по координате x.

Таким образом, энергия пакета волн бесконечно малой амплитуды с различными, но близкими частотами (и, соответственно, волновыми векторами) падает экспоненциально с расстоянием от границы, причем пространственный декремент этого затухания определяется формулой (30) с $f = (2\pi T/m)^{-1/2} \exp(-mv^2/2T)$ (рис. 3А).

Если, однако, мы рассмотрим распространение волн малой, но конечной амплитуды, то затухание их коренным образом изменится. Действительно, из уравнения квазилинейной теории разреженной плазмы для усредненной функции распределения электронов f

$$v\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial v}\, D\, \frac{\partial f}{\partial v} \tag{31 а}$$

$$D = 2\pi\frac{e^2}{m^2}\sum_k |E_k|^2 \delta(\omega - kv) = \frac{e^2}{m^2}\,\frac{|E_k|^2}{v} \tag{31 б*}$$

следует, что диффузия частиц в пространстве скоростей при испускании и поглощении лэнгмюровских колебаний резко уменьшает производную $\partial f/\partial v$, т.е. по формуле (30) затухание волн по мере прохождения через плазму. В области скоростей резонансных частиц решение системы уравнений (30)—(31) есть

$$f(v, x) = \text{const.}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}|E_k|^2 = 0\,, \tag{32}$$

т.е. волны вообще не затухают (рис. 1Б).

В действительности затухание волн имеет хотя и малую, но конечную величину; это связано с тем,

* Это выражение справедливо на расстояниях от границы, больших нескольких длин волн; эффектами пограничной области, где (30) неприменимо, мы не интересуемся. Заметим, что (30) следует из уравнения

$$\frac{\partial N_q}{\partial t} + [\mathscr{H} N_q] = N_q \int \mathrm{d}k\, W_{k,k-q}\, \delta\left(\frac{\hbar k q}{m} - \hbar\,\omega_q\right) q\, \frac{\partial f_k}{\partial q}$$

если учесть, что в рассматриваемом случае $\partial/\partial t = 0$

$$W = 4\pi^2\,\frac{\hbar\omega}{q^2}\,,$$

$$[\mathscr{H} N_q] \equiv \frac{\partial \mathscr{H}_q}{\partial q} \cdot \frac{\partial N_q}{\partial x} - \frac{\partial \mathscr{H}_q}{\partial x} \cdot \frac{\partial N_q}{\partial q} \approx 3\,\frac{k}{\omega}\,\frac{T}{m}\,\frac{\partial N_q}{\partial x}\,.$$

* Волновой вектор k и скорость резонансной частицы v в рассматриваемом случае связаны однозначно: $v = \omega/k$. Выражение (31б) предполагает, что генератор, создающий на границе волну, не создает в то же время свободно летящих резонансных частиц, т.е. некоторое определенное граничное условие. В обратном случае, при наличии свободно летящих резонансных частиц, результаты качественно не изменяются.

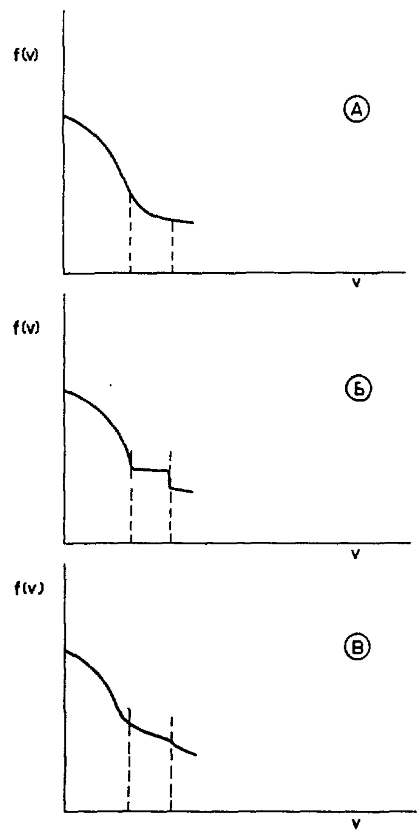

Рис. 3 Искажение функции распределения частиц $f(v)$ под действием пакета лэнгмюровских волн.

что столкновения частиц друг с другом стремятся восстановить термодинамическое равновесие — приблизить функцию распределения электронов к максвелловской, т.е. сделать производную $\partial f/\partial v$ отрицательной (рис. 1В). Для того, чтобы найти величину появляющегося при этом слабого затухания волн нужно ввести в уравнение (2) для усредненной функции распределения f член столкновений. В рассматриваемом случае длинных волн член столкновений имеет вид

$$\mathrm{St}\, f = \frac{\partial}{\partial v}\, \nu_s \left(v f + \frac{T}{m} \frac{\partial f}{\partial v} \right), \tag{33}$$

где «частота столкновений» ν_s равна

$$\nu_s = S/v^3, \tag{34}$$

где S по порядку величин равно ω_e^4/N.

С учетом столкновений между частицами уравнение для функции распределения электронов плазмы принимает вид

$$v \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial v} D \frac{\partial f}{\partial v} + \mathrm{St}\, f, \tag{35}$$

где $\mathrm{St}\, f$ дается выражением (33), а D — формулой (31б).

Если амплитуда волн в пакете не слишком мала, так что выполняется неравенство

$$\frac{E^2}{4\pi NT} \gg \frac{1}{(N_D)^{1/2}}, \tag{36}$$

(где $E^2/4\pi$ — плотность энергии волн), то, как показывает оценка, левой частью (35) можно пренебречь. При этом производная функции распределения, как следует из (35), равна

$$\frac{\partial f}{\partial v} = -\nu_s \frac{v f}{D}. \tag{37}^*$$

Если ширина пакета не очень велика, $\Delta(\omega/k) \ll \sqrt{T/m}$, то как видно из рис. 3, функция распределения (но не ее производная) изменяется под действием волн незначительно, так что в правой части (37) мы можем заменить f на максвелловскую функцию распределения $f_M = (m/2\pi T)^{1/2} \exp(-mv^2/2T)$ и, подставляя получающееся значение производной $\partial f/\partial v = -\nu_s v f_M/D$ в (35), находим

$$\frac{|E_k|^{2\prime}}{|E_k|^2} = -\frac{\pi}{3} \frac{\omega_e^4}{k^3} \frac{m}{T} \nu_s \frac{v f_M}{D} \tag{38}$$

или, учитывая (31б), приходим к уравнению, определяющему пространственный ход $|E_k|^2$:

$$\frac{\partial |E_k|^2}{\partial x} = -\frac{\pi}{3} \frac{\omega_e^4}{k^3} v^2 \frac{m^2}{T} \nu_s \frac{f_M}{e^2}. \tag{39}$$

Из (39) следует, что энергия волнового пакета падает линейно по мере удаления от границы по закону (рис. 4)

$$\frac{|E_k|^2(x)}{|E_k|^2(0)} = 1 - \frac{x}{L}, \tag{40}$$

где характерная длина L (на которой происходит затухание волн, возбуждаемых на границе) прямо-

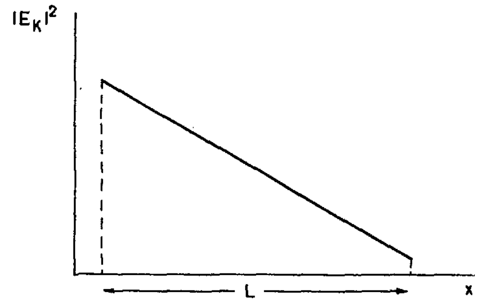

Рис. 4 Затухание лэнгмюровских волн в плазме.

пропорциональна энергии волн на границе и по порядку величины равна

$$L \sim k^{-1} \frac{v^2}{T/m} \frac{NT}{E^2} \frac{1}{N_D}, \tag{41}$$

т.е. значительно превышает длину затухания в линейной теории, если энергия волн превышает энергию тепловых шумов, $E^2/NT \gg 1/N_D$ (напомним, что в рассматриваемом случае $E^2/NT \gg 1/(N_D)^{1/2}$).

В заключение этого раздела заметим, что рассмотренное уменьшение поглощения волн конечной амплитуды в разреженной плазме (см. также [2]) следует учитывать при расчете нагрева плазмы в. ч. полем.

* т. к. в интересующей нас области скоростей (T/m) $(\partial f/\partial v)$ пренебрежимо мало по сравнению с vf.

5. Плазма в постоянном электрическом поле

В настоящем разделе мы рассмотрим квазилинейную теорию плазмы, находящейся в постоянном электрическом поле E. При включении поля E по плазме протекает ток $j=\sigma E$; удельное сопротивление плазмы σ^{-1} состоит из двух слагаемых: первое определяется столкновениями частиц друг с другом, а второе — взаимодействием носителей заряда с флуктуирующими электрическими полями.

При увеличении электрического поля E средняя направленная скорость электронов v_a увеличивается; при некоторой критической скорости v_c состояние плазмы становится неустойчивым, и в ней раскачиваются низкочастотные колебания — ионный звук [3]. Амплитуда и спектр этих колебаний определяются балансом между потоком энергии, поступающим в колебания от электронов, движущихся в постоянном электрическом поле E, и потоком энергии, диссипируемой в колебаниях. Диссипация энергии может определяться двумя процессами: переносом энергии по спектру колебаний от одних мод к другим (перенос между коллективными степенями свободы) и непосредственным переходом энергии колебаний в тепло при столкновениях частиц. Характерное время переноса энергии по спектру стремится к бесконечности при стремлении амплитуды колебаний к нулю, тогда как характерное время диссипации энергии при столкновениях отдельных частиц остается в этом пределе конечным. Поэтому при небольшой надкритичности (т.е. незначительном превышении v_c) форма спектра колебаний и их уровень определяются балансом между энергией, поступающей от движущихся электронов, и энергией, диссипируемой при парных столкновениях частиц, и могут быть найдены с помощью формализма квазилинейной теории, развитого в § 1.

Для простоты рассмотрим неполностью ионизированную плазму, в которой преобладающую роль играют столкновения носителей заряда с нейтралами. При этом мы ограничимся случаем, когда частота столкновений ν_s значительно меньше частоты колебаний ω, так что в колебаниях нейтралы участия не принимают. Мы будем рассматривать плазму, помещенную в сильное магнитное поле, так что для ионно-звуковой ветви длина волны колебаний будет значительно превышать ларморовский радиус ионов.

Дисперсионное уравнение (42) для ионных колебаний в сильном магнитном поле можно получить с помощью разложения кинетического уравнения для быстроосциллирующей части функции распределения по отношению характерной частоты колебаний к ионной циклотронной частоте:

$$k^2 \equiv \omega_{pe}^2 \int \frac{F_e'(v_\parallel)(v_\parallel - \omega/k_\parallel)\, dv_\parallel}{(v_\parallel - \omega/k_\parallel)^2 + \nu_e^2/k_\parallel^2} + \omega_{pi}^2 \int \frac{F_i'(v_\parallel)(v_\parallel - \omega/k_\parallel)\, dv_\parallel}{(v_\parallel - \omega/k_\parallel)^2 + \nu_i^2/k^2}. \qquad (42)$$

Условие баланса потоков энергии (43) имеет вид

$$0 = \omega_{pe}^2 \int \frac{F_e'(v_\parallel)\, \nu_e/k_\parallel\, dv_\parallel}{(v_\parallel - \omega/k_\parallel)^2 + \nu_e^2/k_\parallel^2} + \omega_{pi}^2 \int \frac{F_i(v_\parallel)\, \nu_i/k_\parallel\, dv_\parallel}{(v_\parallel - \omega/k_\parallel)^2 + \nu_i^2/k_\parallel^2}, \qquad (43)$$

$$\omega^2_{pe} \equiv \omega_e^2 = 4\pi N e^2/m; \ \omega_{pi}^2 \equiv \omega_i^2 = 4\pi N e^2/M.$$

В уравнениях (42)—(43)

$$F_{e,i}(v_\parallel) = 2\pi \int f_{e,i}(\varepsilon_\perp, v_\parallel)\, d\varepsilon_\perp$$

представляет собой стационарную часть функции распределения электронов (ионов) по скорости $v_\parallel$, параллельной направлению постоянного магнитного поля,* а $k_\parallel$ — проекция волнового вектора на это направление.

Как известно, ионно-звуковые колебания существуют в плазме только в том случае, когда электронная температура T_e значительно превышает температуру ионов T_i; в этом случае уравнения (42) и (43) принимают вид

$$k^2 = \omega_i^2 \left(\frac{k_\parallel^2}{\omega^2} - \frac{1}{c^2} \right) \qquad (42')$$

$$F_e'(v_\parallel) = \frac{2}{\pi} \frac{m}{M} \nu_i \frac{1}{v_\parallel^2\, \omega(k, v_\parallel)}. \qquad (43')$$

Здесь
$$c^2 = -\left\{ \frac{M}{m} \int \frac{F_e'(v_\parallel)}{v_\parallel - \omega/k_\parallel} dv_\parallel \right\}^{-1} \sim \frac{T_e}{M}$$

представляет собой скорость ионного звука в пределе низких частот ($\omega \to c k_\parallel$, при $\omega \to 0$). Находя из (42′) частоту $\omega(k, v_\parallel)$ и подставляя в (43′), получаем условие стационарности для волны, направленной под углом $\vartheta = \arccos k_\parallel/k$ к магнитному полю:

$$F_e'(v_\parallel) = \frac{2}{\pi} \frac{m}{M} \nu_i \frac{1}{v_\parallel^2 \omega_i \cos\vartheta \sqrt{1 - v_\parallel^2/c^2}}. \qquad (44)$$

Правая часть (44) монотонно возрастает с ростом ϑ; поэтому, если для чисто продольных волн ($\vartheta = 0$) выполнено условие стационарности

$$F_e'(v_\parallel) = \frac{2}{\pi} \frac{m}{M} \nu_i \frac{1}{v_\parallel^2 \omega_i \sqrt{1 - v_\parallel^2/c^2}}, \qquad (45)$$

то все «косые» ($\vartheta > 0$) волны затухают, т.к. для них, в соответствии с (44), диссипация энергии в результате столкновений ионов с нейтралами превышает приток энергии от резонансных электронов. Таким образом, в стационарном состоянии в плазме присутствуют лишь волны, направленные вдоль магнитного поля.

Вид функции распределения электронов, резонирующих со стационарным фоном ионно-звуковых волн, можно определить из уравнения (45); получающееся при этом выражение для функции распределения справедливо в ограниченной области скоростей — там, где дрейф электронов под действием постоянного электрического поля поддерживает стационарный уровень колебаний.

Согласно линейной теории неустойчивость возникает в той области пространства скоростей, где $F_e'(v_\parallel)$ превышает правую часть (45).

* Магнитное поле тока, протекающего по плазме, мы считаем малым и всюду им пренебрегаем.

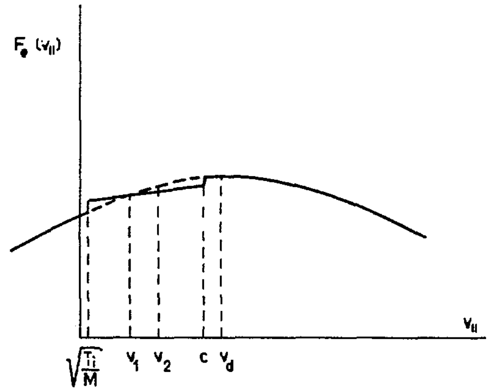

Рис. 5 Функция распределения электронов $F_e(v_\parallel)$ в электрическом поле.

На рис. 5 изображена «первоначальная» область неустойчивости 1—2. Однако, как мы видели в п. 1, за время порядка нескольких периодов колебаний такая неустойчивость распространяется на весь спектр ионных звуковых колебаний, фазовая скорость которых $\omega/k_\parallel$ лежит между средней тепловой скоростью ионов $(T_i/M)^{1/2}$* и скоростью $c \sim (T_e/M)^{1/2}$. В этой области функция распределения электронов по продольным скоростям искажается и принимает вид, изображенный на рис. 5 пунктиром.

Спектр колебаний в этой области можно получить из следующих соображений.

В соответствии с общим формализмом квазилинейной теории (§ 1), учет обратного воздействия колебаний на электроны приводит к уравнению для стационарной функции распределения $F_e(v_\parallel)$

$$\frac{e}{m} E \frac{\partial F_e}{\partial v_\parallel} + \frac{\omega_e^2}{m} \frac{\partial}{\partial v_\parallel} \frac{\varepsilon_k/N}{v_\parallel(1-v_\parallel^2/c^2)} \frac{\partial F_e}{\partial v_\parallel} = 0, \quad (46)$$

где $\varepsilon_k = E_k^2/4\pi$, $(k=\omega/v_\parallel)$ — спектральная плотность электростатической энергии. В уравнении (46) первое слагаемое описывает изменение электронного распределения под действием постоянного электрического поля E, а второе слагаемое вызвано обратным воздействием возбужденных волн на резонансные частицы.

Интегрируя (46), получаем выражение для спектральной плотности энергии:

$$\frac{\varepsilon_k/R_D}{N T_e} \frac{\nu_e}{\nu_i} \left(\frac{M}{m}\right)^{3/2} = x^3(1-x^2)^{3/2} \sqrt{\frac{T_e}{m}} \times \left\{ \int \frac{v_a}{c} F_e \, dv_\parallel + c' \right\}, \quad (47)$$

где «электронный дебаевский радиус» $R_D = \sqrt{T_e/m}/\omega_e$, $x \equiv v_\parallel/c$.

Постоянную интегрирования в (47) мы найдем, налагая требование минимальности полной энергии в спектре колебаний. Требование минимальности заключается в следующем. В том диапазоне пространства скоростей, где выполнено условие (44), могут не затухая распространяться ионно-звуковые волны (например, от какого-то внешнего источника). Если спектр этих волн таков, что

$$\frac{\varepsilon_k}{v_\parallel(1-v_\parallel^2/c^2)} \frac{\partial F_e}{\partial v_\parallel} = \text{const.},$$

то они не дают вклада в диффузию электронов, т.е. вообще не взаимодействуют с плазмой. Поэтому определение спектра возможно лишь с точностью до такого пакета невзаимодействующих, «посторонних» волн. Требование минимальности энергии исключает этот пакет. Чтобы удовлетворить этому требованию, мы должны добавить к монотонно-возрастающей (в рассматриваемой области) функции

$$\frac{v_a}{c} \int F_e'(v_\parallel) \, dv_\parallel = -\alpha \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^2},$$

где $\alpha = (2/\pi)(v_a/c)(m/M)(\nu_i/\omega_i)$ постоянное положительное слагаемое

$$c' = \alpha \frac{\sqrt{1-x_0^2}}{x_0}, \quad x_0 \cong \sqrt{T_i/T_e}.$$

Следовательно, спектр ионно-звуковых колебаний имеет вид:

$$\frac{\varepsilon_k/R_D}{N T_e} = 2\left(\frac{m}{M}\right)^{3/2} \frac{\nu_e}{\omega_e} \times \left\{ \frac{\sqrt{1-x_0^2}}{x_0} - \frac{\sqrt{1-x^2}}{x} \right\} \bar{x} \cdot x^3 (1-x^2)^{3/2}.$$

$$\bar{x} \equiv v_a/c. \quad (48)$$

Как мы уже упоминали, ионный звук существует лишь при $T_i/T_e \ll 1$, т.е. $x_0 \ll 1$. Поэтому почти во всей области частот спектральная плотность дается следующей формулой:

$$\frac{\varepsilon_k/R_D}{N T_e} \simeq \left(\frac{m}{M}\right)^{3/2} \frac{T_e}{T_i} (\omega_i \tau_i) \bar{x} \cdot x^3 (1-x^2)^{3/2}$$

$$(\tau_i \equiv 1/\nu_i). \quad (49)$$

Полная плотность электростатической энергии ионно-звуковых колебаний равняется

$$\frac{E^2}{8\pi N T_e} \sim \frac{1}{60\pi^2} \frac{T_e}{T_i} (\omega_i \tau_i) \bar{x}. \quad (50)$$

Из формулы (49) можно найти распределение энергии в низкочастотной части спектра (обычно измеряемое на эксперименте)

$$\varepsilon_\omega = \frac{\varepsilon_k}{d\omega/dk} \approx \frac{\varepsilon_k}{c} = \frac{N T_e}{\omega_i} \left(\frac{m}{M}\right)^{3/2} \frac{T_e}{T_i} (\omega_i \tau_i) \bar{x} \left(\frac{\omega}{\omega_i}\right)^3. \quad (51)$$

Влияние этих колебаний на процессы переноса в однородной плазме мало, так как:

1) Спектр является одномерным ($E_k \parallel H$) поэтому электрические поля колебаний не могут привести к появлению «аномальной диффузии» частиц поперек магнитного поля.

* Вблизи ионной тепловой скорости наступает сильное резонансное поглощение колебаний на ионах, более чем в $\sqrt{M/m}$ раз превышающее раскачку электронами.

2) В пространстве скоростей колебания «занимают» малую область $(c/(T_e/m)^{1/2} \simeq \sqrt{m/M})$. С точки зрения протекания электрического тока электроны можно разбить на две группы: резонансные электроны, тормозящиеся на ионных колебаниях, и нерезонансные электроны, тормозящиеся при столкновениях с нейтралами. Так как во второй группе в $\sqrt{M/m}$ раз больше электронов, влияние дополнительного «коллективного» сопротивления в данном случае мало.

6. Влияние циклотронных волн на время жизни частиц в ловушке с магнитными пробками

Причиной появления неустойчивости и шумов в ловушках с магнитными пробками* может явиться анизотропия функции распределения частиц в пространстве скоростей. Эта анизотропия не только может быть вызвана соответствующей инжекцией или нагревом плазмы, но и органически присуща самому способу удержания: вблизи точек поворота частиц их продольная энергия полностью переходит в поперечную.

Как известно, в результате такой анизотропии в плазме раскачивается электромагнитная волна, поляризованная по кругу [3]. Фазовая скорость волны велика (порядка альфвеновской). Поэтому для того, чтобы в распределении частиц по скоростям оказались резонансные частицы, для которых из-за допплер-эффекта частота волны равна ларморовской частоте, необходимо, чтобы

$$v_{\|} = \frac{\omega \pm \omega_H}{K_{\|}} \sim \sqrt{\frac{T}{m}},$$

поскольку $\omega/k_{\|} \sim H/\sqrt{4\pi N M} > \sqrt{T/M}$, то это возможно лишь при выборе знака минус, который соответствует волне с круговой поляризацией в направлении вращения частиц.

Рассмотрим усредненное влияние такой волны на движение частиц в пространственно-однородной плазме. Для простоты ограничимся случаем чисто продольного распространения. Под действием вращающихся электрического

$$E_- = E_x - \mathrm{i}\, E_y \tag{52}$$

и магнитного

$$H_- = -\frac{\mathrm{i}\, c}{\omega} k E_- = H_x - \mathrm{i}\, H_y \tag{53}$$

полей волны с волновым числом k изменение функции распределения частиц f_k в пространственно-однородной плазме равно:

$$f_k = \mathrm{i} E_{-k} \frac{1}{\omega_k} \frac{(\omega_k - k v_{\|})(\partial f_0/\partial v_{\perp}) + k v_{\perp}(\partial f_0/\partial v_{\|})}{\omega - k v_{\|} - \omega_{H\alpha}} \frac{e_\alpha}{2 m_\alpha} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi} \tag{54}$$

Здесь f_0 — усредненная по многим колебаниям функция распределения частиц по скоростям, $v_{\|}$, $v_{\perp}$ и φ — цилиндрические координаты в пространстве скоростей, e_α и m_α — заряд и масса частиц.

* В дальнейшем мы всюду предполагаем, что магнитогидродинамическая неустойчивость таких систем устранена соответствующей стабилизацией.

Уравнение для функции f_0 получается путем усреднения уравнения Больцмана по малым осцилляциям, при этом получаем:

$$\frac{\mathrm{d} f_0}{\mathrm{d} t} = \left\langle \sum_{kk'} \left[\left(\mathbf{E}_k + \frac{\mathbf{v} \times \mathbf{H}_k}{c} \right) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_k t + \mathrm{i} k z} + \text{c.c.} \right] \times \left[\frac{\partial f_k'}{\partial \bar{v}} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_k t + \mathrm{i} k' z} + \text{c.c.} \right] \right\rangle . \tag{55}$$

Это приводит к уравнению:

$$\frac{\mathrm{d} f_0}{\mathrm{d} t} = \left\{ \left(1 - \frac{k v_{\|}}{\omega_k}\right) \frac{1}{v_{\perp}} \frac{\partial}{\partial v_{\perp}} v_{\perp} + v_{\perp} \frac{\partial}{\partial v_{\|}} \frac{k}{\omega_k} \right\} D_H \times \left\{ \left(1 - \frac{k v_{\|}}{\omega_k}\right) \frac{\partial}{\partial v_{\perp}} + \frac{k v_{\perp}}{\omega_k} \frac{\partial}{\partial v_{\|}} \right\} f_0, \tag{55 a}$$

где

$$D_H = \frac{1}{4} \frac{|E_k|^2}{|\mathrm{d}\omega/\mathrm{d}k - v_{\|}|} \frac{e_\alpha^2}{m_\alpha^2},$$

а между $v_{\|}$ и ω_k имеется следующая связь:

$$v_{\|} = \frac{\omega_k - \omega_{H\alpha}}{k} .$$

Таким образом под действием волн изменяется как продольная скорость частиц, так и поперечная, т.е. магнитный момент $\mu_\alpha = m_\alpha v_\perp^2/2\,H$. Уравнение (55) имеет вид уравнения Фоккер-Планке в пространстве скоростей. В результате «диффузии» функция распределения выравнивается вдоль линий

$$v_{\|} - \frac{v_\perp^2 k}{2\omega_{H\alpha}} = \text{const}.$$

Так как рассматриваются волны малой амплитуды, для которых перенос энергии от одной Фурье-гармоники к другой ничтожно мал по сравнению с потоком энергии от частиц, то изменение энергии волн или пропорционального ей «коэффициента диффузии» D_H определяется из обычной линейной теории:

$$\frac{\mathrm{d} \ln D_H}{\mathrm{d} t} = 2\gamma \{f_0\}, \tag{56}$$

где $\gamma \equiv \mathrm{Im}\,\omega_k$, в свою очередь, может быть найдено из дисперсионного уравнения для малых колебаний:

$$\frac{k^2 c^2}{\omega^2} - 1 = \frac{1}{2} \sum_\alpha \frac{\omega_\alpha^2}{\omega^2} \int \frac{(\omega - k v_{\|})(\partial f_0/\partial v_\perp) + k v_\perp (\partial f_0/\partial v_{\|})}{\omega - \omega_{H\alpha} - k v_{\|}} v_\perp \mathrm{d}\mathbf{v}. \tag{57}$$

Здесь

$$\omega_\alpha^2 = 4\pi N e_\alpha^2/m_\alpha, \quad \omega_{H\alpha} = e_\alpha H/m_\alpha c .$$

Описанная выше неустойчивость значительно быстрее развивается на электронной ветви колебаний. Однако электроны удерживаются пространственным зарядом ионов. Поэтому уход плазмы, в конце концов, определяется уходом ионов. Если длина волны значительно меньше размеров системы $kL \gg 1$, то для вычисления изменения энергии волны можно воспользоваться приближением геометрической оптики. В этом случае изменение спектральной плотности энергии колебаний ε_k в данной точке определяется уравнением:

$$\frac{\partial \varepsilon_k}{\partial t}+\frac{\partial \omega_k}{\partial k}\frac{\partial \varepsilon_k}{\partial z}-\frac{\partial \omega_k}{\partial z}\frac{\partial \varepsilon_k}{\partial k}=2\gamma\{f_0\}\varepsilon_k+J_k(z), \quad (58)$$

где $J_k(z)$ — мощность источников теплового шума для данной гармоники k, определяемая по закону Кирхгофа. В уравнении (58) третьим членом в левой части можно, вообще говоря, пренебречь. В результате получаем следующее уравнение для изменения коэффициента диффузии в пространстве:

$$\frac{\partial D_H}{\partial t}+\frac{\partial \omega_k}{\partial k}\cdot\frac{\partial D_H}{\partial x}=2\gamma D_H+\dot{D}_{H_0}. \quad (59)$$

($\dot{D}_{H_0}$ выражается через равновесные флюктуации электрического поля).

В том же приближении $kL\gg 1$ диффузия частиц под действием волн описывается уравнением (55). Если поле слабо изменяется на размерах порядка размеров ионной орбиты, то в дрейфовом приближении для средней функции распределения f_0 получается следующее уравнение:

$$\frac{\partial f_0}{\partial t}+v_\parallel\frac{\partial f_0}{\partial z}-\frac{\mu_\alpha}{m_\alpha}\frac{\partial H_0}{\partial z}\frac{\partial f_0}{\partial v_\parallel}$$
$$=\left\{\frac{1}{H}\frac{\partial}{\partial \mu_\alpha}+\frac{\partial}{\partial v_\parallel}\frac{k}{\omega_{H\alpha}}\right\}\frac{2\mu}{H}D_H\left\{\frac{\partial}{\partial \mu_\alpha}+\frac{kH}{\omega_{H\alpha}}\frac{\partial}{\partial v_\parallel}\right\}f_0. \quad (60)$$

В принципе уравнения (57), (59) и (60) позволяют полностью решить задачу об «аномальном» уходе частиц в ловушке. Мы, однако, ограничимся оценкой коэффициента диффузии D_H и времени ухода частиц.

При отсутствии ухода частиц функция их распределения по скоростям в поле, изменяющемся до величины H_m в «пробке», дается следующим выражением:

$$f_0=f_m(v_\parallel,v_\perp)\,\varepsilon\left(v_\perp\frac{H_m-H}{H}-v_\parallel^2\right)$$
$$\varepsilon(x)=\begin{cases}1 & x>0\\ 0 & x<0\end{cases} \quad (61)$$

где $f_m(v_\parallel, v_\perp)$ — максвелловская функция распределения. Предположим далее, что эта функция изотропна. При таком распределении (с незаполненным конусом ушедших частиц) из уравнения (57) следует, что:

$$\gamma=-\sqrt{\pi}\frac{k}{\sqrt{2T/M}}v_\parallel^2 e^{-Mv_\parallel^2/2T}\left(1+\frac{H_m+H}{H_m-H}\frac{k}{\omega_{Hi}}\frac{v_\parallel^3}{(2T/M)^{3/2}}\right) \quad (62)$$

и

$$k^3=-\frac{\omega_{Hi}^3}{v_\parallel v_A^2}\sqrt{\frac{H_m-H}{H_m}};\quad v_A=\frac{H_m}{\sqrt{4\pi NM}}. \quad (63)$$

В этих выражениях $v_\parallel=(\omega-\omega_{Hi})/k$, т.е. скорость частиц, находящихся в резонансе с волной, имеющей данный волновой вектор k. Направление оси z выбрано так, чтобы магнитное поле расло при $z\to\infty$. Из выражения (63) видно, что нарастающая волна распространяется от пробки вглубь ловушки.

В результате раскачки волн коэффициент диффузии D_H также нарастает по мере удаления от пробки:

$$\ln(D_H/D_{H_0})\simeq 2\int_0^z\frac{\gamma(z)}{\partial\omega/\partial k}\mathrm{d}z=\int_0^z\gamma(z)\frac{\mathrm{d}z}{v_\parallel}. \quad (64)$$

Величина $\varphi=\int_0^z[\gamma(z)/v_\parallel]\mathrm{d}z$ достигает максимума для волн, у которых

$$v_\parallel\sim\sqrt{\frac{2T}{M}}\beta^{1/2}\left(\frac{14}{3}\right)^{3/2}\quad \text{при}\quad z=2\beta L.$$

Здесь $\beta=\sqrt{4\pi NT/H_0^2}$, а H_0 — среднее поле.

В результате коэффициент диффузии оказывается по порядку величины равным:

$$\ln(D_H/D_{H_0})\approx\frac{L}{r_{\Lambda i}}\beta^{4/3},$$

где $r_{\Lambda i}$ — радиус ларморовского вращения иона. Так как диффузия на тепловых колебаниях близка к диффузии из-за парных столкновений, то величина $L/r_{\Lambda i}\beta^{4/3}$ грубо определяет уменьшение времени жизни частиц в ловушке.

В существующих ловушках эта величина весьма мала, так как в них $\beta\sim 10^{-4}-10^{-5}$, а $z_{\Lambda i}\sim 1-0{,}1\,L$.

Величина $\beta_c\sim(r_{\Lambda i}/L)^{3/4}$ определяет критическое значение β, выше которого даже в стабилизированных относительно магнитогидродинамической неустойчивости ловушках с пробками должен наблюдаться аномальный уход.

Отметим, что любое увеличение степени анизотропии функции распределения в результате инжекции или магнитного сжатия должно усилить описываемую диффузию.

7. Заключение

Квазилинейное приближение является полезным методом описания слабо нелинейных процессов в плазме. Для полного описания стационарного состояния плазмы во внешних полях или процесса релаксации в неустойчивой плазме кроме обратного влияния колебаний на распределение частиц необходимо знать и специфические процессы диссипации колебаний в плазме типа «пересечения траекторий», а также законы распада спектра плазменных колебаний. В настоящее время эти процессы изучены лишь для некоторых частных и простых моделей типа одномерных ленгмюровских колебаний электронов. Повидимому, существенный прогресс в этой области может быть достигнут с помощью модельных «машинных экспериментов».

Литература

[1] Давыдов Б. И., Сб. «Физика плазмы и проблема управляемых термоядерных реакций», АН СССР, Москва (1958) т. I, 77.

[2] Веденов А. А., Велихов Е. П., Сагдеев Р. З., *Ядерный синтез* I (1961) 82—100.

[3] Веденов А. А., Велихов Е. П., Сагдеев Т. З. *Успехи физических наук* 73 (1961) 701.