Вычисление корреляционных функций с помощью дуальной гравитации (примеры)

$$ds_5^2 = \frac{(\pi T L)^2}{u}\left(-f dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2\right) + \frac{L^2}{4 f u^2} du^2$$

$$f = 1 - u^2$$

Это решение соотв. состоянию $N=4$ SYM с матрицей плотности $\hat{\rho} = e^{-\beta \hat{H}}$, $\beta = 1/T$ (в пределе $N_c \to \infty$, $\lambda \to \infty$).

Для вычисления коррел. ф. оператора $\hat{T}^{\mu\nu}$ нужен произв. функционал $Z[J] = \left\langle e^{i\int J \mathcal{O} d^4x} \right\rangle_T$, где $\hat{\mathcal{O}} = \hat{T}^{\mu\nu}$. В пределе $N_c \to \infty$, $\lambda \to \infty$

$$Z[J] = e^{i S_\varepsilon [J]},$$ где J - гран. значение поля, связанного с $T^{\mu\nu}$ (т.е. флуктуации метрики $h_{\mu\nu}$).

Т.о., необх. решить уравнение движ.

для $h_{\mu\nu}$ (или $H_{\mu\nu}$, или $Z_{1,2,3}$), подставить решение как функционал гран усл. (т.е. $h_{\mu\nu} = h_{\mu\nu}(h^0_{\mu\nu})$) в S_ε и потом взять функц. произв. $\delta/\delta h^0_{\mu\nu}$ для вычисл. $\langle \hat{O} \rangle$, $\langle OO \rangle$ и т.д. При этом $S[g^{BG}_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}]$ нужно разложить по $h_{\mu\nu}$ до необх. порядка (1-го для $\langle O \rangle$, 2-го для $\langle OO \rangle$, 3-го для $\langle OOO \rangle$ и т.д.).

$$S = \frac{\pi^3 L^5}{2\varkappa_{10}^2}\left[\int_0^1 du\, d^4x \sqrt{-g}\,(R - 2\Lambda) + \right.$$

$$\left. + 2\int d^4x \sqrt{-h}\, K + \underbrace{a\int d^4x \sqrt{-h}}_{}\right]$$

гран. член Гиббонса-Хокинга

$a = -6/L$

обеспеч. перенормировку

$$\varkappa_{10} = 2\pi^2 \sqrt{\pi}\, L^4 / N_c$$

На урав. движ. (on shell):

$$S = \cancel{S_{horizon}} + S_\varepsilon$$

$$S_\varepsilon = \frac{\pi^2 N_c^2 T^4}{8}\int d^4x \Big[-1 + \frac{1}{2}\left(3H_{tt} + H_{xx} + H_{yy} + H_{zz}\right) + \frac{1}{8}\left(3H_{tt}^2 - 12H_{tz}^2 + \dots\right) - \frac{1}{2\epsilon}\left(H_{tz}^2 + \dots\right)'_u\Big]\Big|_{u=\varepsilon\to 0}.$$

<u>Уточнение коэффициентов связи.</u>

ТО на границе:

$$\frac{1}{2}\int dt\,d^3x\, h^\nu_\mu T^\mu{}_\nu = \frac{1}{2}\int dt\,d^3x \left(H^0_{tt} T^{tt} + H^0_{zz} T^{zz} + \dots\right)$$

(см Tseytlin, Liu, hep-th/9804083)

Тогда:

$$\langle T^{tt}\rangle_T = 2\frac{\delta S_\varepsilon}{\delta H^0_{tt}} = \frac{3}{8}\pi^2 N_c^2 T^4$$

$$\langle T^{zz}\rangle_T = 2\frac{\delta S_\varepsilon}{\delta H^0_{zz}} = \frac{1}{8}\pi^2 N_c^2 T^4$$

Т. о.

1) $$\langle T^{\mu\nu}\rangle_T = \begin{pmatrix} \mathcal{E} & & & 0 \\ & P & & \\ & & P & \\ 0 & & & P \end{pmatrix},$$ где

$$\mathcal{E}_{\lambda=\infty} = \frac{3}{8}\pi^2 N_c^2 T^4 = \frac{3}{4}\mathcal{E}_{\lambda=0}.$$

$$P_{\lambda=\infty} = \frac{1}{8}\pi^2 N_c^2 T^4 = \frac{3}{4}P_{\lambda=0}.$$

2) Мы видим, что $\mathcal{E}_{\lambda=\infty} = 3P_{\lambda=\infty}$, как и должно быть в CFT.

Вычисление 2-х точечных функций

- $$Z_3 = H_{xy} = h^x{}_y$$

$$Z_3'' - \frac{1+u^2}{uf}Z_3' + \frac{\bar{w}^2-\bar{q}^2 f}{uf^2}Z_3 = 0$$

$$Z_3 = A_{(3)}(1+\dots) + B_{(3)}u^2(1+\dots)$$

Соотв. часть грав. действия имеет вид

$$S_\varepsilon = -\frac{\pi^2 N_c^2 T^4}{8} \lim_{u\to 0} \int \frac{d\omega dq}{(2\pi)^2} \frac{f(u)}{u} Z_3'(u,k) Z_3(u,-k)$$

$$G^R_{xy,xy} = \langle T_{xy}(k), T_{xy}(-k) \rangle_R =$$

$$= -\frac{\pi^2 N_c^2 T^4}{2} \frac{B_{(3)}}{A_{(3)}}$$

<u>Замечание</u>: полюса G^R — нули $A_{(3)}$ = решения ур. $Z_3(u=0; \bar\omega, \bar q) = 0$.

<u>В общем случае (hep-th/0205051</u>
hep-th/0506184)

Общее решение для флукт. поля φ, связ. с $\mathcal{O}$:

$$\varphi = A(\omega,q)\, u^{\Delta_-} + \ldots + B(\omega,q)\, u^{\Delta_+} + \ldots,$$

$\Delta_\pm$ — индексы ODE, $\Delta_+ > \Delta_-$

(случай $\Delta_+ - \Delta_- \in \mathbb{Z}$ рассм. отдельно, но принцип. разницы нет).

- φ удовл. гран. усл. входящей волны на гориз. $(u=1)$

• гран усл. в т. $u = \varepsilon \to 0$:

$$f_k(u) = \frac{A u^{\Delta_-} + \ldots + B u^{\Delta_+} + \ldots}{A \varepsilon^{\Delta_-} + \ldots + B \varepsilon^{\Delta_+} + \ldots}$$

т. е. $f_k(\varepsilon) = 1$.

Из действия S :

$$G^R \sim N \varepsilon^{\alpha} f_k'(u) \Big|_{u=\varepsilon\to 0}$$

динамич. информация содержится в f_k'.

$$f_k'(u) = \frac{A \Delta_- u^{\Delta_- -1} + \ldots + B \Delta_+ u^{\Delta_+ -1} + \ldots}{A \varepsilon^{\Delta_-} + \ldots + B \varepsilon^{\Delta_+} + \ldots}$$

$$f_k'(\varepsilon) = \frac{\Delta_-}{\varepsilon} \, \frac{1 + \ldots + \frac{B}{A} \frac{\Delta_+}{\Delta_-} \varepsilon^{\Delta_+ - \Delta_-} + \ldots}{1 + \ldots \; \frac{B}{A} \varepsilon^{\Delta_+ - \Delta_-} + \ldots}$$

$$= \frac{\Delta_-}{\varepsilon} \left(1 + \ldots + \frac{B}{A} \left(\frac{\Delta_+}{\Delta_-} - 1 \right) \varepsilon^{\Delta_+ - \Delta_-} + \ldots \right)$$

$$f_k'(\varepsilon) = \frac{B}{A}(\Delta_+ - \Delta_-)\,\varepsilon^{\Delta_+ - \Delta_- - 1} + \ldots$$

$$\Rightarrow \quad G^R \sim N(\Delta_+ - \Delta_-)\,\varepsilon^{\Delta_+ - \Delta_- - 1 + \alpha}\,\frac{B}{A}.$$

т.е. $\boxed{G^R(\omega, q) \sim \frac{B(\omega, q)}{A(\omega, q)}}$.

Полюса G^R – нули A. Но нули A соотв. усл. Дирихле на φ в точке $u = 0$ (на границе).

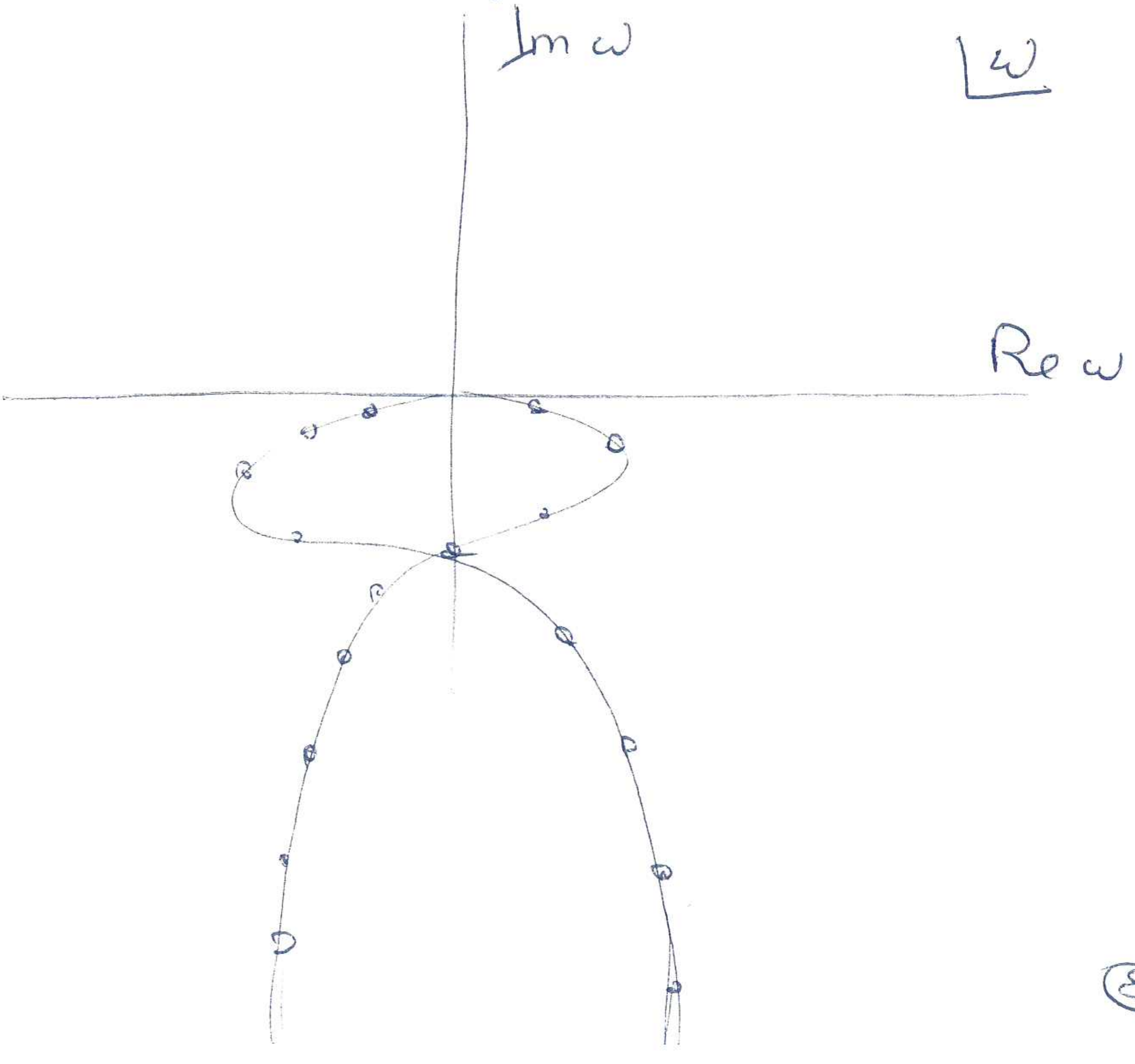
$$A(\omega, q) = 0 \quad \Rightarrow \quad \omega = \omega(q) \;-$$

– квазинормальный спектр флуктуаций дуального грав. фона.

- комплексные частоты (т.к. гран. условие на горизонте соответств. неэрмитовой краевой задаче)
- дискретный спектр ω_n, $n = 1, \ldots$
- общие свойства неэрмит. задач изучены плохо

Замечание: спектр, конечно, зависит от типа метрики и от конкретных условий на границе. Усл. Дирихле соотв. спектру, совпадающему с полюсами G^R в дуальной КТП.

Замечание: квазинорм. спектры асимпт. плоских метрик выглядят качеств. по-другому – $d=4$ Шварцшильд



Замечание: эти моды аналогичны резонансным состояниям в квант. мех (см. Базь-Зельдович-Переломов)

Пример: $d=2$ CFT $T\neq 0$ (hep-th 0205051)

Дуальный фон: черная брана BTZ в $d=3$

$$ds^2 = l^2 d\mu^2 - sh^2\mu\,(dx^+)^2 + ch^2\mu\,(dx^-)^2.$$

$\Lambda = -1/l^2$: космол. пост.

$\boxed{z \equiv th^2\mu}$ $z=1$: граница; $z=0$: гор.

Оператор $\hat{O}_\Delta$ в CFT связан со скал. массивным полем в грав.

$$f''_{zz} + \frac{1}{z} f'_z + \left[\frac{l^2 k_+^2}{4z^2(1-z)} - \frac{l^2 k_-^2}{4z(1-z)} - \frac{m^2 l^2}{4z(1-z)^2}\right] f = 0$$

Здесь $k_\pm$ сопряжены $x_\pm$ (Фурье).

Решение:

$$f = z^\alpha (1-z)^\beta \varepsilon^{-\beta} (1-\varepsilon)^{-\alpha} \frac{{}_2F_1(a,b;c;z)}{{}_2F_1(a,b;c;\varepsilon)}$$

$$a, b = \frac{l(k_+ \pm k_-)}{2i} + \beta, \quad c = 1 + 2\alpha$$

$$\alpha_\pm = \pm i l k_+ / 2$$

$$\beta_\pm = \frac{1}{2}\left(1 \pm \sqrt{1 + l^2 m^2}\right) = \frac{\Delta_\pm}{2}.$$

<u>Гран. условие на гориз. $(z=0)$: $\alpha = \alpha_-$</u>

Гран. условие (Дирихле) в $z=1$:

$f(z=1) = 0$ определяет спектр квазинорм. частот.

$$_2F_1(a, b; c; z=1) = \frac{\Gamma(c)\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)} = 0.$$

$$\Rightarrow \left.\begin{aligned} c - a &= -n \\ c - b &= -n \end{aligned}\right\} \quad n = 0, 1, \ldots$$

$$\Delta_{L,R} = 2h_{L,R}$$

<u>Введем</u>: $(k_+ + k_-)l = (\omega - k)/2\pi T_L$

$(k_+ - k_-)l = (\omega + k)/2\pi T_R$

$$\Rightarrow \left.\begin{aligned} \omega_n &= k - i\,4\pi T_L (n + h_L) \\ \omega_n &= -k - i\,4\pi T_R (n + h_R) \end{aligned}\right\} \text{ спектр}$$

Можно вычислить и G^R, напр.

$$G^R_{\Delta=2} \sim \frac{(\omega^2-k^2)}{T_L T_R}\left[\psi\left(1-\frac{i(\omega-k)}{4\pi T_L}\right)+\right.$$

$$\left.+\psi\left(1-\frac{i(\omega+k)}{4\pi T_R}\right)\right]$$

Полюса $G^R_{2d\,CFT}$ = квазинорм. частоты фона BTZ.

(это было замечено в hep-th/0112055 – Birmingham, Sachs, Solodukhin).