Лекция 5 Элементы теории струн

Струны и браны

Теория струн – квант. теория взаимод. релятив. одномерных и многомерных объектов

V-1 Фундам. параметр:

$$T = \frac{1}{2\pi\alpha'} \qquad \alpha' = l_s^2$$

т.е. площадь миров. поверхн. струны

$$S = -T\int d^2\sigma \sqrt{-\det g}\,, \text{ где}$$

действ. Намбу-Гото

$$g_{\alpha\beta} = G_{MN}\frac{\partial X^M}{\partial\sigma^\alpha}\frac{\partial X^N}{\partial\sigma^\beta}$$ – индуц. метрика

σ^α, $\alpha = 0, 1$ – коорд. на миров. поверхн.

X^M $M = 0, \dots D-1$

Замечание: мы рассм. струны в формал. первичного квантования (см. квантов. рассм. точечных частиц в книгах Грина-Шварца-Виттена или Бринка-Энно). Существует и квант-полевая теория струн.

- квантование струнного действия (в виде действия Полякова) в плоском простр.-врем. ($G_{MN} = \eta_{MN}$) ведет к след. результатам:

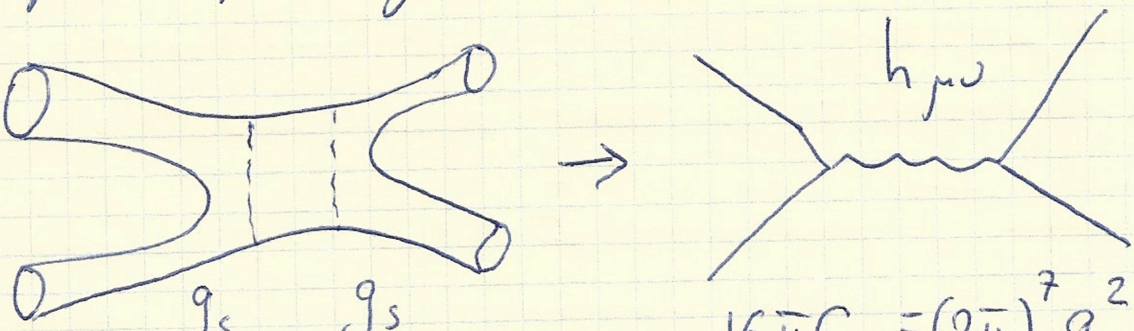
— спектр: конечное число безмассовых мод и ∞ число массивных сост. с

V-2 $m_s \sim l_s^{-1}$.

— в зависим. от гран. условий, $\exists$ 5 видов теорий струн: тип IIA, тип IIB, тип I, гетеротич. струны с $E_8 \times E_8$, гетер. с $SO(32)$. Все они явл. пределами объедел. „М-теории" в $d = 11$.

— отсутствие сост. с отриц. нормой $\Rightarrow d = 10$

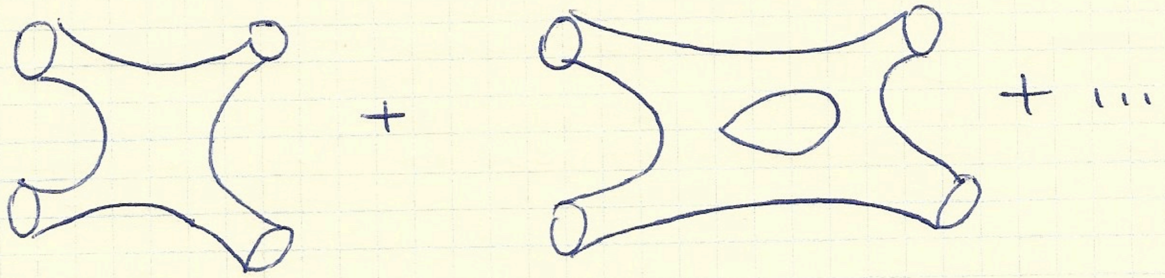
• взаимодействия струн контролир. параметром g_s



$$16\pi G_{10} = (2\pi)^7 g_s^2 l_s^8$$

При этом $g_s = e^{\Phi}$, где Φ — вак. среднее поля дилатона (одной из безмасс. мод спектра).

Петлевое разложение:



V-3

$$g_s^{2h-2}$$

h – колич. дырок

Т.о., эффективно имеются 2 парам.

l_s и g_s:

L – масштаб конфиг. полей (напр, метрики)

калибр.-<u>грав.</u> дуальность как

подмнож. калибр.-струнной дуальности.

Т. о., эффективно мы имеем 2 парам.: l_s и g_s

Используя гравит.-калибр. приближение к струнно-калибр. дуальности, нужно следить за выполн. условий

$$L \gg l_s \quad \text{и} \quad g_s \ll 1,$$

V-4 где L - характ. размер геометрии, кот. мы рассматриваем в модели (напр., параметр метрики - радиус сферы и т.д.).

В частности, дилатон Φ не должен быть слишком велик везде в грав. решении (кот. может вкл. метрику, дилатон и другие поля).

Браны (Polchinski, 1995)

- непертурбативные (по g_s) многомерные (миров. поверх.: $p+1$-мерна) решения т. струн. Их натяжение T (плотность - масса на объем V_{p+1})

$$T_{D_p} \sim \frac{1}{g_s l_s^{p+1}}$$

Это „топол. дефекты" в простр.-времени, гиперповерхности, на кот. оканчиваются открытые струны (концы откр. струн могут своб. двигаться по V_{p+1}) — отсюда D (Dirichlet) — браны.

Действие Полякова (эквив. Намбу-Гото)

V-5 $$S = -\frac{1}{4\pi\alpha'}\int d^2\sigma \sqrt{-h}\, \partial_\alpha X^M(\sigma)\, \partial_\beta X^N(\sigma)\, h^{\alpha\beta}(\sigma)\, \eta_{MN}$$

$\sigma = \{\sigma^1, \sigma^2\}$ — струна двигн. в плоском пр-врем.

<u>Симметрии</u>:

- $X^M \to X'^M = \Lambda^M{}_N X^N + a^M$

  Пуанкаре-инвар.

- Репараметризация мир.ов. поверхн.

  $\sigma^\alpha \to \sigma'^\alpha = f(\sigma)$

  $h_{\alpha\beta}$ — преобр. как тензор, X^M — как скаляр.

- Вейлевская инвар.

  $h_{\alpha\beta}(\sigma) \to e^{2\Omega(\sigma)} h_{\alpha\beta}$; $X'^M = X^M$.

<u>Эти симм. должны сохр. на квант. уровне</u>

Ур. движ. (в конф. калибровке):

$$(\partial^2_{\sigma_1} - \partial^2_{\sigma_2}) X^M = 0$$

$\Rightarrow$ реш. и квантование (с разными гран. усл.) – набор осцилляторов α^M_n и $\tilde{\alpha}^M_n$. См. лит. по теор. струн –

V-5' Грин-Шварц-Виттен, Бринк-Энио, Kiritsis (совр.). Квант. сост. строятся обычным образом:

– $\alpha^M_n |0; k\rangle$ откр. стр.

импульс ц. инерции

– $\alpha^M_n \tilde{\alpha}^N_n |0, 0; k\rangle$ замкн. стр.

спектр осн. сост. содержит

g_{MN} (симм. тензор бесслед.), B_{MN} (антисимм.),

и ϕ (дилатон)

Полный спектр содержит безмассовые и массивные моды с $m_s \sim 1/l_s$ (их ∞ много, так что возникает вопрос о сходимости статсуммы и T Хагедорна –

см. Atick - Witten (1988)).

Для суперструн нужно добавить фермионные операторы.

В общем случае, все эти степени своб. возбуждены (откр, замкн. струны, браны). Однако при низких энергиях ($E \ll 1/l_s$)

V-6 имеет значение только низколежащие уровни.

Пример: теор. струн типа IIB, безмассовый спектр:

$g_{\mu\nu}$	гравитон
ϕ, C	дилатон, аксион
$B_{\mu\nu}$, $A_{\mu\nu}$	антисимм. ранг 2
$A^{+}_{\mu\nu\lambda\sigma}$	антисимм. ранг 4 (самодуальное)
$\psi^{I=1,2}_{\mu,\alpha}$	гравитино (Майор. - Вейлевск.)
$\lambda^{I=1,2}_{\alpha}$	дилатино (Майор. - Вейлевск.)

Оказывается, это спектр $N=2$ суперграв. в $d=10$ (!)

Взаимод. струны с квантами этого спектра описыв. действием

$$S = -\frac{1}{4\pi\alpha'}\int d^2\sigma \sqrt{-h}\Big[h^{\alpha\beta}\partial_\alpha X^\mu(\sigma)\partial_\beta X^\nu g_{\mu\nu}(X)$$

$$+\varepsilon^{\alpha\beta}\partial_\alpha X^\mu \partial_\beta X^\nu B_{\mu\nu}(X) +$$

V-7

$$+\alpha' R(h)\phi\Big]$$

скал. крив. на мир. пов.

(Это аналог

т.е. $\vec{A}\cdot\vec{v}$.

$$S = -m\int ds - e\int A_\mu dx^\mu - \frac{1}{4e^2}\int F_{\mu\nu}^2 dx)$$

т.е. это 2d КТП с полями $X^\mu(\sigma)$

и „конст. связи" $g_{\mu\nu}(X)$, $B_{\mu\nu}$, ϕ –

– „нелинейная σ-модель".

Вейлевская инвар. на квант. уровне

$$\Rightarrow \beta = 0 \qquad (T^\alpha_\alpha = 0).$$

Эти выражения для β-функционалов имеют вид:

$$\beta_{\mu\nu}(X) = R_{\mu\nu}(X) + \frac{1}{4}H_\mu^{\lambda\sigma}H_{\nu\lambda\sigma} - 2D_\mu\partial_\nu\phi + O(\alpha') = 0$$

т.е. низкоэнерг. моды должны

удовл. некот. условиям.

Здесь $H_{\mu\nu\rho} = \partial_\mu B_{\nu\rho} + \partial_\rho B_{\mu\nu} + \partial_\nu B_{\rho\mu}$

– обобщ. $F_{\mu\nu}$.

V-8 Таким образом можно получить набор

низкоэнерг. уравв. теор. струн типа IIB

Вот он:

$$R_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\partial_\mu\phi\,\partial_\nu\phi + \frac{1}{4}e^{-\phi}\left(H_{\mu\alpha\beta}H_\nu{}^{\alpha\beta} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}H^2\right)$$

$$+ e^{2\phi}\frac{1}{2}\partial_\mu C\,\partial_\nu C$$

$$+ e^{\phi}\frac{1}{4}\left(\tilde{F}_{\mu\lambda\sigma}\tilde{F}_\nu{}^{\lambda\sigma} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}\tilde{F}^2_{(3)}\right)$$

$$+ \frac{1}{96}\tilde{F}_{\mu\lambda\rho\sigma\varkappa}\tilde{F}_\nu{}^{\lambda\rho\sigma\varkappa}.$$

$$\nabla^2\phi = e^{2\phi}\partial_\mu C\,\partial^\mu C - \frac{1}{2}e^{-\phi}H_3^2 + \frac{1}{12}e^{\phi}\tilde{F}^2_{(3)}$$

$$\partial_\mu\left(\sqrt{g}\,g^{\mu\nu}e^{2\phi}\partial_\nu C\right) = -\frac{1}{6}e^{\phi}H_{\mu\nu\sigma}\tilde{F}^{\mu\nu\sigma}_{(3)}$$

$$d * \tilde{F}_5 = H_3 \wedge F_3$$

$$d * (e^{\phi} \tilde{F}_3) = \tilde{F}_5 \wedge H_3$$

$$d * (C \tilde{F}_3 e^{\phi} - H_3 e^{-\phi}) = \tilde{F}_5 \wedge F_3$$

$$\tilde{F}_5 = * F_5$$

V-9

$$\left. \begin{aligned} d\tilde{F}_3 &= - dC \wedge H_3 \\ d\tilde{F}_5 &= H_3 \wedge F_3 \end{aligned} \right\} \text{тожд. Бьянки}$$

В этих формулах:

$$\tilde{F}_3 = F_3 - C H_3 , \qquad F_3 = dA_2$$
$$H_3 = dB_2$$

$$\tilde{F}_5 = F_5 - \frac{1}{2} A_2 \wedge H_3 + \frac{1}{2} B_2 \wedge F_3$$

<u>Обозначения</u>: $F_p^2 = F_{M_1 \ldots M_p} F^{M_1 \ldots M_p}$

Для $\Phi = \frac{1}{p!} \phi_{i_1 \ldots i_p} dx^{i_1} \wedge \ldots dx^{i_p}$

$$* \Phi = \frac{1}{(d-p)!} \frac{1}{p!} \varepsilon_{i_1 \ldots i_d} \sqrt{|g|} \phi_{j_1 \ldots j_p} g^{i_1 j_1} \ldots$$
$$\ldots g^{i_p j_p} dx^{i_{p+1}} \wedge \ldots dx^{i_d}$$

Эти уравнения можно получить из низкоэнерг. эфф. действия (кроме ур. $\tilde{F}_5 = *\tilde{F}_5$, это отдельная история)

$$S_{IIB} = S_{NS} + S_R + S_{CS}$$

V-10

$$S_{NS} = \frac{1}{2\varkappa_{10}^2}\int d^{10}x\,\sqrt{-g}\left(R - \frac{1}{2}\partial_\mu\phi\,\partial^\mu\phi - \frac{1}{2}e^{-\phi}|H_3|^2\right)$$

$$S_R = -\frac{1}{4\varkappa_{10}^2}\int d^{10}x\,\sqrt{-g}\left(e^{2\phi}|F_1|^2 + e^{\phi}|\tilde{F}_3|^2 + \frac{1}{2}|\tilde{F}_5|^2\right)$$

$$\hookrightarrow \frac{1}{2}\tilde{F}_5\wedge *\tilde{F}_5 \underset{\text{on shell}}{=} 0$$

$$S_{CS} = -\frac{1}{4\varkappa_{10}^2}\int C_4\wedge H_3\wedge F_3$$

⊕ фермионные члены

⊕ поправки (∞ ряд) по α'

Поправки по α' к низкоэнерг. действию частично известны, напр. (II B):

$$R - \frac{1}{2}(\partial\phi)^2 - \frac{1}{4\cdot 5!}(\tilde{F}_5)^2 + \dots + \gamma e^{-\frac{3}{2}\phi} W + \dots$$

$$\gamma \equiv \frac{1}{8}\zeta(3)\alpha'^3$$

V-11 Здесь $W = C^{hmnk} C_{pmnq} C_h{}^{rsp} C^q{}_{rsk} +$

$+$ аналог. члены, а

$$C_{abcd} = R_{abcd} - \frac{2}{d-2}\left(g_{a[c} R_{d]b} - g_{b[c} R_{d]a}\right) + \frac{2}{(d-1)(d-2)} R\, g_{a[c} g_{d]b}$$

– тензор Вейля

Известны также поправки к F_5 (M. Green, M. Paulos).

Замечание: большинство решений низкоэнерг. ур. теор. струн содержат поправки по α'. Но нек. решения являются точными во всех порядках

(напр., $Mink_{10}$ или $AdS_5 \times S^5$).

В общем случае, у данного реш.

(метрики) будет 2 вида поправок

V-12 - струнные (по α' или l_s) и квант. грав.-

-по l_P (или G).

Классич. решения верны при вып. услов.

$$L \gg l_s \quad \text{и} \quad L \gg l_P,$$

где L - характ. масштаб реш. (напр., радиус Шварцшильда).

Напомним, что $G_{10} \sim l_P^8 \sim g_s^2 l_s^8$.

В AdS/CFT:

$$\frac{L^4}{l_s^4} = g_{YM}^2 N_c \equiv \lambda \quad \text{(конст. связи 'т Хофта)}$$

$$g_s = g_{YM}^2 / 4\pi$$

т.е. грав. приближение к струнно-

калибр. дуальности верно при

$\boxed{\lambda \gg 1}$ и при

$$L = \lambda^{1/4} l_s \gg l_p \sim g_s^{\frac{1}{4}} l_s \text{, т.е.}$$

$$\lambda^{1/4} \gg g_s^{1/4} \quad \text{или}$$

V-13

$$g_{YM}^2 N_c \gg g_{YM}^2 \quad \text{или}$$

$$\boxed{N_c \gg 1}.$$

<u>Мораль</u>: дуальное <u>грав.</u> описание будет работать в пределе $\lambda \to \infty$, $N_c \to \infty$.

Поправки к этому описанию будут 2-х типов: из струнной геометрии (по α') – по $1/\lambda$ и из квант. грав. (по g_s) или по $1/N_c$ (на самом деле – по $1/\lambda^{3/2}$ и $1/N_c^2$ в случае калибр. теорий, дуальных струнам типа IIB).

<u>Замечание</u>: дуальность (гипотеза) верна $\forall\ \lambda, N_c$, здесь речь идет о границах грав. приближения к ней.

Некоторые решения ур. движ. низкоэнергетич. описания струны типа IIB

Положим равными нулю все поля, кроме $g_{\mu\nu}$, F_5 и $\phi = const$. Тогда

V-14 уравн. движ. сводятся к

$$\begin{cases} R_{\mu\nu} = \frac{1}{96} F_{\mu\rho\sigma\lambda\varkappa} F_{\nu}{}^{\rho\sigma\lambda\varkappa} \\ F_5 = * F_5 \end{cases}$$

Упр: проверить самосогласов.

Замеч: ур. $d * F_5 = 0$ выполнено как следствие тождества Бьянки $dF_5 = 0$ и условия самодуальности $F_5 = *F_5$.

Решение: (черная 3-брана)

$$ds_{10}^2 = H^{-1/2}(r)\left[-f\,dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2\right] +$$

$$+ H^{1/2}(r)\left[\frac{dr^2}{f} + r^2 d\Omega_5^2\right],$$

где $H = 1 + L^4/r^4$

$f = 1 - r_0^4/r^4$

$$F_5 = -\frac{4L^2}{H^2 r^5}\sqrt{r_0^4+L^4}\,(1+*)\,dt\wedge dx\wedge dy\wedge dz\wedge dr$$

<u>Упр</u>: проверить, что это решение.

Данная метрика — асимпт. плоская.

V-15

Рассмотрим область $r \ll L$:

введем $u \equiv r_0^2/r^2$, $f = 1-u^2$,

$T \equiv r_0/\pi L^2$. Тогда

$$ds_{10}^2 = \frac{(\pi T L)^2}{u}\left(-f\,dt^2+dx^2+dy^2+dz^2\right)+$$

$$+\frac{L^2}{4u^2 f}du^2 + L^2 d\Omega_5^2 =$$

$$= \underbrace{\text{AdS-Schwarzschild black brane}}_{5d} \times \underbrace{L^2 d\Omega_5^2}_{S_L^5}$$

<u>Замечание</u>: данное решение - одно из класса решений для ур. движ. при низких энергиях в теор. струн типа IIB и IIA, содержащих нетривиальные поля: $g_{\mu\nu}$, Φ и A_{p+1} - формы

Рамон-Рамона (p - четное для IIA и нечет. для IIB).

(1988-1991 Gibbons, Maeda; Garfinkle, Horowitz, Strominger.)

См. обзор K. Stelle hep-th/9701088.
(лекции)

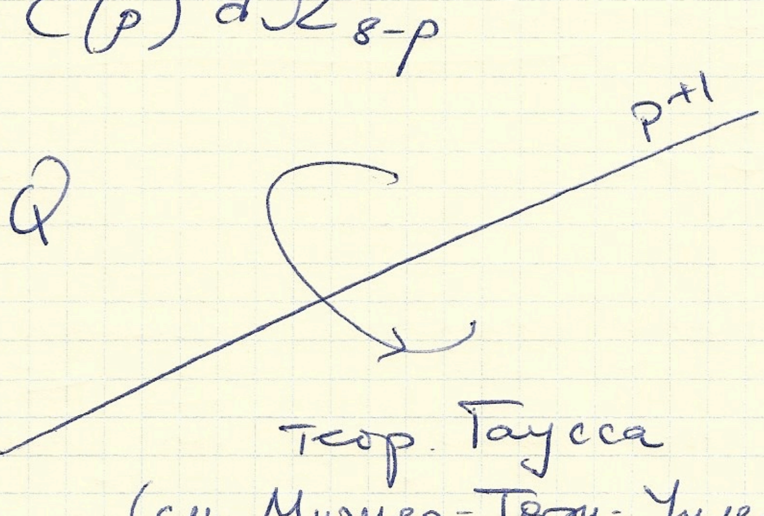
и AGMOO.

V-16 Решения с $\phi = \text{const}$ назыв. бездилатонными.

<u>Задача</u>: найти решения в виде протяжённых объектов с плотностью (массы) M и зарядом (по отнош. к потенциалу A_{p+1}) Q.

$$ds^2 = A(\rho)\left(-f\,dt^2 + \sum_{i=1}^{p} dx^i dx^i\right) +$$
$$+ B(\rho)\,d\rho^2 + C(\rho)\,d\Omega^2_{8-p}$$

$$\int_{S^{8-p}} * F_{p+2} = Q$$



теор. Гаусса
(см. Мизнер-Торн-Уилер).

Свойства реш: $M \geq Q$ (отсутств. naked singul.)

Решения вида $M = Q$ назыв. экстремальными. Для них $A_H \to 0$ (т.е. $S \to 0$)

Экстремальные p-браны

$$ds_{10}^2 = H^{-1/2}(r)\left(-dt^2 + \sum_{i=1}^{p} dx_i dx^i\right) + H^{1/2} r^2 d\Omega_{8-p}^2$$

$$e^{\Phi} = g_s H^{\frac{3-p}{4}}(r)$$

V-17

$$H = 1 + \frac{L^{7-p}}{r^{7-p}} \qquad L^{7-p} = d_p g_s Q \, l_s^{7-p}$$

$$d_p \equiv 2^{5-p} \pi^{\frac{5-p}{2}} \Gamma\left(\frac{7-p}{2}\right)$$

Замечание: r здесь отсчитывается от горизонта (а в коорд. ρ – от $\rho = 0$), т.е. $r = 0$ – горизонт. См. AGM00.

Замечание: эти решения (экстрем.) суперсимметричны и удовл. условию BPS (Богомольного - Прасада - Зоммерфилда).
$M = Q$

Для неэкстрем. решений: $S > 0$, $T > 0$, $M > Q$.