Лекция 4 Элементы ОТО и ТД черных дыр

$$S = \frac{1}{2\varkappa_d^2} \int_M (R - 2\Lambda + \dots) \sqrt{|g|}\, d^d x +$$

(*) пока M без ∂M

IV-1 $$+ \int_M \mathcal{L}_{matter} \sqrt{|g|}\, d^d x ,$$

где $\varkappa_d^2 = 8\pi G_d$ (мы использ. $c=1$ и сигнат. $-++\dots$)

Λ – космол. постоянная.

Ур. движ: (см ЛЛ, т. II и др)

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R + \Lambda g_{\mu\nu} = \varkappa_d^2 T_{\mu\nu} ,$$

где $$T^{\mu\nu} = \frac{1}{2\sqrt{-g}} \frac{\delta \mathcal{L}_{matter}}{\delta g_{\mu\nu}}$$

Замечание: вычислив след ур. движ.,

получим
$$R = \frac{\varkappa_d^2 T^\mu_\mu - \Lambda d}{1 - d/2} \quad \text{и}$$

$$R_{\mu\nu} = \varkappa_d^2 T_{\mu\nu} - \frac{g_{\mu\nu}}{d-2} \varkappa_d^2 T^\mu_\mu + \frac{2}{d-2} g_{\mu\nu} \Lambda$$

Если $\mathcal{L}_m = 0 \Rightarrow$

$$R_{\mu\nu} = \frac{2\Lambda}{d-2} g_{\mu\nu}$$

Замечание (важное): $\delta S = 0$, помимо грав. урав., дает также урав. для полей материи, зацепленные с ур. гравитации в общую систему ур.

IV-2

Замечание (о размерности)

$g_{\mu\nu}$ – безразмерна ($dl^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$)

Связность $\Gamma^\mu_{\lambda\sigma} \sim \partial_\lambda g^\mu_\sigma + \ldots \sim 1/L$

Тенз. Римана: $R_{\mu\nu\lambda\sigma} \sim \partial\Gamma - \partial\Gamma + \Gamma\Gamma - \Gamma\Gamma$ $\sim 1/L^2$. $\Rightarrow R_{\mu\nu}$ и $R \sim 1/L^2$.

А также $\Lambda \sim 1/L^2$.

Все это верно $\forall d$. Поэтому, т.к. действие безразмерно (при $\hbar = 1$, $c = 1$), то $\varkappa_d^2 \sim L^{d-2}$.

$$\varkappa_d^2 = 8\pi G_d \sim l_p^{d-2}$$

Более точно: $l_p^{d-2} = \dfrac{G_d \hbar}{c^3}$

Замечание: точки в S соотв.

членам с высш. произв., например,

$$R - 2\Lambda + \frac{\lambda_{GB} l_{GB}^2}{2}\left(R^2 - 4R_{\mu\nu}R^{\mu\nu} + R_{\mu\nu\lambda\sigma}R^{\mu\nu\lambda\sigma}\right)$$

(грав. Гаусса-Бонне в $d \geq 5$), этих членов ∞ много, у них – размерные коэффициенты – если $R \sim 1/L^2$, то $R^2 \sim 1/L^4$, поэтому коэфф. $\sim L^2$ и т. д.

Пример решения ур. движ. с $\mathcal{L}_m = 0$, $\Lambda = 0$

IV-3
$$R_{\mu\nu} = 0$$

$$ds_d^2 = -f_d(r)dt^2 + \frac{dr^2}{f_d} + r^2 d\Omega_{d-2}^2,$$

где $f_d = 1 - \left(\frac{r_0}{r}\right)^{d-3}$, $d\Omega_{d-2}^2$ – метрика на $S_{R=1}^{d-2}$.

Это решение – асимпт. плоское, $ds_d^2 \to \mathrm{Mink}_d$ при $r \to \infty$.

Заметим, что on shell (на ур. движ.) $R_{\mu\nu} = 0$ и $\overset{\text{ч}}{R} = 0$ (но не $R_{\mu\nu\lambda\sigma}$).

Сингулярности метрики – $r = r_0$; 0

$r = r_0$ – корень $f_d(r_0) = 0$ – горизонт. Это коорд. сингулярность, ее можно „убрать" заменой координат, т.к. $g_{\mu\nu}$ – это тензор. Например, удобны коорд. системы Крускала-Зекерса или Эддингтона-Финкельштейна.

IV-4

<u>$r = 0$ – сингулярность</u>. Можно вычислить инварианты кривизны, например, инвар. Кречмана $K = R_{\mu\nu\lambda\sigma} R^{\mu\nu\lambda\sigma}$, кот. для $d=4$ реш. Шварцшильда

$$K = 12 r_0^2 / r^6 \quad (\text{т.е. } K \to \infty \text{ при } r \to 0, \text{ но не при } r \to r_0).$$

Таких инвар. много (упр. – сколько?)

$d = 4$: 14 шт

$d = 5$: 40 шт

$\forall d$ $\quad d(d-1)(d-2)(d+3)/12$

(это без учета ковар. произв.).

<u>Замечание</u> (важное): о пределах применимости класс. ОТО

Когда реш. применимо (напр., вблизи горизонта $r \sim r_0$)?

$$K(r_0) \sim 1/r_0^4 \ll 1/l_P^4$$

т.к. при $r \sim l_P$ поправки к ОТО существенны (класс. и квантовые).

IV-5 Замечание: еще нужно проверить, не велики ли приливные силы.

Важно: в ~~гр~~ грав. - калибр. дуальн. нужно знать пределы применимости грав. приближения к струнному решению.

Замечание: другие критерии "здоровья" метрики - полнота геодезических.

Вычисление температуры Хокинга

Рассмотрим метрику в нашем примере вблизи горизонта:

$$f_d(r) = f_d'(r_0)(r-r_0) + O((r-r_0)^2)$$

$f_d'(r_0) = (d-3)/r_0$

Теперь сделаем поворот Вика к Евкл. τ

$$t \to -i\tau$$

и заменим перем. $r \to \rho$ так, чтобы

$$\frac{dr^2}{f_d'(r_0)(r-r_0)} = d\rho^2$$

IV-6

Тогда:

$$ds_d^2 = d\rho^2 + \rho^2 d\varphi^2 + \ldots \quad (\text{вблизи гориз.}),$$

где $\varphi \equiv \frac{f_d'(r_0)}{2}\tau$.

Если $\varphi \in [0, 2\pi]$, то ds_d^2 полностью регулярна (это просто полярные коорд.), иначе возникнет конич. сингул.

Т.о., $\tau \in \left[0, \frac{4\pi}{f_d'(r_0)}\right]$ для рег. метрики.

С точки зрения функц. интеграла

$$\langle\phi_2, t_2 | \phi_1, t_1\rangle = \int D\phi\, e^{iS} =$$

$$= \langle\phi_2| e^{-iH(t_2-t_1)} |\phi_1\rangle. \text{ Положим}$$

$t_2 - t_1 \equiv -i\beta$. Если $\phi_2(t_1 - i\beta) = \phi_1(t_1)$, мы вычислим

$$Z = \operatorname{tr} e^{-\beta H} \quad \text{при} \quad \beta = 1/T.$$

$$\Rightarrow \beta = 4\pi / f_d'(r_0) \quad \text{и}$$

IV-7
$$\boxed{T = \frac{f_d'(r_0)}{4\pi} = \frac{d-3}{4\pi r_0}}$$

При $d=4$: $\quad T = \dfrac{1}{4\pi r_0} = \dfrac{1}{8\pi G M}$

– Темп. (Hawking) излучения черной дыры.

$r_0 = 2G_4 M \qquad d=4$

$$M = \frac{(d-2)\,\Omega_{d-2}\, r_0^{d-3}}{16\pi G_d}, \qquad \Omega_{d-2} = \frac{2\pi^{\frac{d-1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{d-1}{2}\right)}$$

площадь пов. $S^{d-2}_{R=1}$.

Вычисление площади горизонта

В общем случае, если $N \subset M$,

то $V_N = \int \sqrt{|g_{induced}|}\, d\Sigma_N$

Для нашей метрики, ур. вложения горизонта: $t = const$, $r = r_0$,

т.е. $dt = 0$, $dr = 0$ $\Rightarrow$

$$dS^2_\Omega = r_0^2\, d\Omega^2_{d-2}$$ – индуцир. метрика

При $d=4$:

$$dS^2_\Omega = r_0^2(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\varphi^2),$$

$$A = \int \sqrt{g_\Omega}\, d\Omega$$

IV-8 $g_\Omega = r_0^4 \sin^2\theta$ и $(d=4)$

$$A = r_0^2 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} d\theta = 4\pi r_0^2.$$

$\forall d$: $A_d = r_0^{d-2}\, \Omega_{d-2}$.

<u>Постулируем</u> энтропию Бекенштейна-Хокинга

$$S = \frac{A_d}{4G_d}$$

В нашем случае: $S = \dfrac{r_0^{d-2}\,\Omega_{d-2}}{4G_d}$

<u>Для $d=4$</u>: $S = 4\pi G_4 M^2$, $T = \dfrac{1}{8\pi G_4 M}$

Т. о.,

$$T\, dS = dM \quad (\text{и } \mathcal{E} = Mc^2)$$

или $d\mathcal{E} = T\, dS$ (1-й закон ТД)

<u>Упр</u>: проверить $\forall d$.

~~Ответ~~: $T = \frac{d-3}{4\pi r_0} \frac{\hbar c}{k_B}$

$$S = \frac{k_B c^3 A}{4 G_d \hbar}$$

$d=4$ (Шварцшильд):

$$T = \frac{1}{4\pi r_0} \frac{\hbar c}{k_B} = \frac{\hbar c^3}{k_B} \frac{1}{8\pi G M}$$

IV-9 $S = \frac{k_B}{\hbar c} 4\pi G M^2 \qquad \left(A = 4\pi r_0^2, \; r_0 = \frac{2GM}{c^2}\right)$

<u>Замечание</u>: т.к. $l_p^{d-2} = G_d \hbar / c^3$

$$S = \frac{k_B A}{4\, l_p^{d-2}}$$

т.е. S/k_B безразмерна.

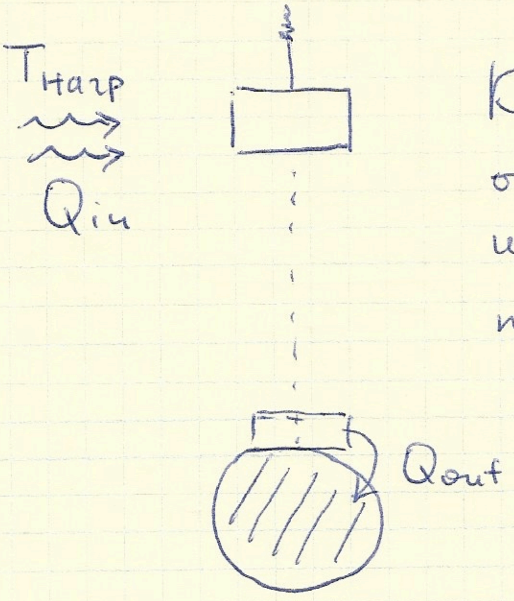
<u>Эвристические соображения тов. Бекенштейна</u>

Phys Rev D <u>7</u> (1973) p. 2333

„Black holes and entropy".

КПД цикла Карно: $\eta \le 1 - \frac{T_{хол}}{T_{нагр}}$

Рассмотрим „машину Героха" (Geroch)



Контейнер на веревочке опускается в грав. поле, совершая работу W. Потом его поднимают, совершая работу W.

Заполним контейнер излучен. при $T = T_{нагр}$ ($Q_{in} = mc^2$), которое потом выпустим в черную дыру. Размер контейнера конечен: $d \gtrsim \lambda$, где $k_B T_{нагр} \sim \hbar\omega = \frac{\hbar c}{\lambda}$

IV-10

т.е. $d \gtrsim \hbar c / k_B T_{нагр}$.

к.п.д.: $$\eta = 1 - \frac{mgd}{Q_{in}} = 1 - \frac{gd}{c^2} \le$$

$$\le 1 - \frac{g\hbar}{c k_B T_{нагр}} \equiv 1 - \frac{T_{хол}}{T_{нагр}}.$$

$T_{хол} \equiv g\hbar / c k_B$. Но $g = \frac{GM}{r_0^2}$, где

$r_0 = 2GM/c^2$.

$$\Rightarrow g \sim c^4/GM$$

$$\Rightarrow T_{хол} \sim \frac{\hbar c^3}{k_B GM}.$$

Bekenstein (1973)

Hawking (1974)

Четыре закона механики черных дыр
(Bardeen, Carter, Hawking, 1973).

ТД равновесие характериз. набором сохр. величин (E, J, Q...).

Решения ОТО в виде черных дыр характ. набором величин (M, J, Q...). Есть утверждения о единственности этих реш. (в $d=4$ и выше) и дискуссии по поводу неединственности, стабильности и т.д. в $d \geq 5$ (black rings, Saturns etc — см. H. Reall ++).

IV-11 Т.о., есть схожесть между сост. ТД равн. и невозмущ. реш. ОТО в виде черных дыр.

Законы „механики" черных дыр устан. в виде теорем (см. лит.).

BHO: Поверхн. гравитация (surface gravity) $\varkappa$ постоянна на горизонте

TDO: В сост. ТД равновесия темпер. в системе везде постоянна.

Напоминание: $\varkappa$ – это, грубо говоря, ускор. своб. падения. Точнее –

$\varkappa$ – ускорение (измеряемое на ∞), необх. для удержания объекта на горизонте. Если K^μ – соотв. вектор Киллинга горизонта (с нормализацией $K^\mu K_\mu \to -1$ при $r \to \infty$ в асимпт. плоском простр-времени), то $\varkappa$ опр.:

IV-12 $$K^\mu \nabla_\mu K^\nu = \varkappa K^\nu .$$

<u>Пример</u>: $d=4$ Шварцшильд. реш.

Ускорение статич. наблюдателя

$$x^\mu = (t, \underbrace{r_*, \theta_*, \varphi_*}_{\text{фиксир.}})$$

$$u^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau} = \left(\left(1-\frac{2GM}{r}\right)^{-\frac{1}{2}}, 0, 0, 0\right).$$

$$a^\mu = u^\lambda \nabla_\lambda u^\mu = u^0 (\partial_0 u^\mu + \Gamma^\mu_{0\rho}) u^\rho =$$

$$= (u^0)^2 \Gamma^\mu_{00} = \left(1-\frac{2GM}{r}\right)^{-1} \Gamma^\mu_{00} .$$

Но только $\Gamma^r_{00} \neq 0 \Rightarrow$

$$a^r = \frac{GM}{r^2}$$

$$|a| = \sqrt{a_\mu a^\mu} = \sqrt{g_{rr} a^r a^r} = \frac{GM}{r^2} \frac{1}{\sqrt{1-\frac{2GM}{r}}}$$

$$|a| = \frac{GM}{r^2}\frac{1}{\sqrt{1-2GM/r}} = \frac{GM}{r^2}\frac{1}{d\tau/dt}$$

$$\varkappa \equiv \underset{\text{собств. уск.}}{|a|}\, \underset{\text{красное смещение.}}{d\tau/dt} = \frac{GM}{r^2}$$

(Еще один вывод — исп. уравн. для K^μ и коорд. Эддингт.-Финкельшт., где горизонт не сингулярен.)

IV-13

$$\varkappa(r_0) = \frac{1}{4GM} = \frac{1}{2\pi T_H}.$$

BH1 : $\delta M = \frac{\varkappa}{8\pi G}\delta A + \Omega_H \delta J + \Phi_H \delta Q$

Ω_H, Φ_H — угл. скор. и эл. потенциал на гориз.

TD1 : $dE = TdS - A\,da + \mu\, dN$

BH2 : $\delta A \geq 0$ (теор. Хокинга)

TD2 : $\delta S \geq 0$

BH3 : Ни в каком процессе невозможно

достичь $\varkappa = 0$ конечным числом шагов.

<u>ТД3</u>: Ни в каком процессе невозм. достичь $T = 0$ конечным числом шагов.

<u>Примечание</u>: более общая формула

IV-14 для энтропии для грав. действия вида

$$S = \int d^d x \sqrt{|g|}\, \mathcal{L}(g_{\mu\nu}, R_{\mu\nu\lambda\sigma}, \nabla_\rho R_{\mu\nu\lambda\sigma}, \phi, \nabla\phi, \dots)$$

дана Уолдом (R. Wald)

$$S_W = -2\pi \oint_\Sigma \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta R_{abcd}}\, d\Sigma^{abcd}.$$

<u>Замечание</u>: $\exists$ несколько способов вывода формул для <u>излуч. Хокинга</u>, см, напр., S. Carlip 0807.4520 [gr-qc]

Излуч. Хокинга уменьшает массу ч.дыр, поэтому A уменьш. Обобщен. энтр.

$S_{TOT} = S_{BH} + S$, тогда $\delta S_{TOT} \geq 0$.

Замечание: для нестацион. процессов с участием грав. определить S не так просто (см. Hubeny – Rangamani).
Т.к. S – это ТД величина, это обст. не так уж удивительно.

IV-15 Мораль: черные дыры ведут себя как ТД объекты с

$$k_B T_H = \frac{\hbar \varkappa}{2\pi}$$

$$S_{BH}/k_B = \frac{c^3 A}{4G\hbar}$$

ТД должна следовать из стат. мех. микросоставляющих (микросостояний черн. дыр на квант. уровне).
Частичный успех подсчета микросостояний некоторых черных дыр был достигнут в работе Строминджера и Вафы (Strominger, Vafa, 1996), см. A. Sen 0708.1270 [hep-th] и в других подходах к квант. грав.

см. Carlip, 2009 – обзор.

∃ и более экзотич. взгляды на квант. природу черных дыр – см. S. Mathur или G. Dvali. В целом, вопрос остается открытым.

IV-16 Работы в теор. струн по объяснению энтропии черных дыр стали предтечей струнно-калибр. дуальности.