Лекция 3   Дуальность Крамерса-Ванье

Модели стат. мех. на решетке — см.
Bill Sutherland, „Beautiful models"

III-1

Б. Сазерленд „Замечательные модели",
Рег. и хаотич. динамика, Ижевск, 2008.

Модели ферромагнетиков:

- квантовая модель Гейзенберга

$$H = -J \sum_{\langle ij \rangle} \vec{\sigma}_i \cdot \vec{\sigma}_j$$

$\{\sigma_i\}$ — матр. Паули, $\langle ij \rangle$ — соседние вершины

- классич. модель Гейзенберга —
  — упрощение $\vec{\sigma} \to \vec{S}$ (вектор)
- модель Изинга (предложена Ленцем)

$$\vec{S} \longrightarrow \text{скаляр } S = \pm 1$$

$$H = -J \sum_{\langle ij \rangle} S_i S_j$$

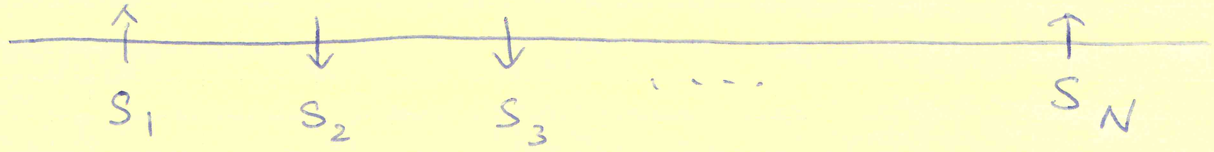
У этой модели есть глобальная симметрия $\mathbb{Z}_2$: $S_i \to -S_i \quad \forall i$.

Свойства модели зависят от размерности пространства решетки d_s.

Напоминание: модель Изинга в $d_s = 1$

$$Z = \mathrm{tr}\,\hat{\rho} = \mathrm{tr}\, e^{-\beta \hat{H}} = \sum_{s_1=\pm 1} \cdots \sum_{s_N=\pm 1} e^{\beta J \sum_{\langle ij \rangle} s_i s_j}$$

III-2



• Выберем гран. условия — напр., $s_N = s_1$.

• Можно добавить внешнее магн. поле B

$$\hat{H} = -J \sum_{\langle ij \rangle} s_i s_j - \mu B \sum_{i=1}^{N} s_i \, ,$$ где

μ – магн. момент.

Посмотрев на картинку, $\hat{H}$ можно записать в симметричной форме

$$\hat{H} = -J \sum_{i=1}^{N} s_i s_{i+1} - \frac{1}{2} \mu B \sum_{i=1}^{N} (s_i + s_{i+1})$$

$$Z = \sum_{s_1=\pm 1} \cdots \sum_{s_N=\pm 1} e^{\beta \sum_{i=1}^{N} \left[J s_i s_{i+1} - \frac{1}{2} \mu B (s_i + s_{i+1}) \right]}$$

$$= \sum_{s_1=\pm 1} \cdots \sum_{s_N=\pm 1} \langle s_1 | \hat{V} | s_2 \rangle \langle s_2 | \hat{V} | s_3 \rangle \langle \cdots \hat{V} | s_1 \rangle$$

$$\langle s_i|\hat{V}|s_{i+1}\rangle = e^{\beta[J s_i s_{i+1} - \frac{1}{2}\mu B(s_i + s_{i+1})]}$$

$s_i = \pm 1$, где

$$\hat{V} = \begin{pmatrix} e^{\beta(J+\mu B)} & e^{-\beta J} \\ e^{-\beta J} & e^{\beta(J-\mu B)} \end{pmatrix}$$

т.е. экспонента суммы факториз. в произвед. экспонент.

III-3 Т.о., $Z = \sum_{s_1=\pm 1} \langle s_1|V^N|s_1\rangle$

после суммир. по промеж. состояниям.

$Z = \mathrm{tr}\,\hat{V}^N = \lambda_1^N + \lambda_2^N$, где $\lambda_{1,2}$ — собств. знач. $\hat{V}$, т.е. корни урав.

$$\lambda^2 - 2\lambda e^{\beta J}\,\mathrm{ch}\,\beta\mu B + 2\,\mathrm{sh}\,2\beta J = 0$$

$$\lambda_{1,2} = e^{\beta J}\,\mathrm{ch}\,\beta\mu B \pm \left[e^{-2\beta J} + e^{2\beta J}\,\mathrm{sh}^2\beta\mu B\right]^{\frac{1}{2}}$$

Т.к. $\lambda_1 > \lambda_2 \Rightarrow \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^N \to 0$, $N \to \infty$.

Поэтому в ТД пределе $N \to \infty$ имеем

$$Z = \lambda_1^N\left[1 + \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^N\right] \approx \lambda_1^N$$

$$F = -\frac{1}{\beta}\ln Z = -\frac{N}{\beta}\ln\lambda,$$

$f \equiv F/N$ плотность св. энерг:

$$f = -\frac{1}{\beta}\ln\lambda, \quad (\text{finite in } N\to\infty \text{ limit})$$

III-4 Функция f – гладкая ф. параметров $\to$ нет фаз. перех. в $d_s = 1$.

При $\vec{B} = 0$, $f = -T\ln(2\,\mathrm{ch}\, J/T)$.

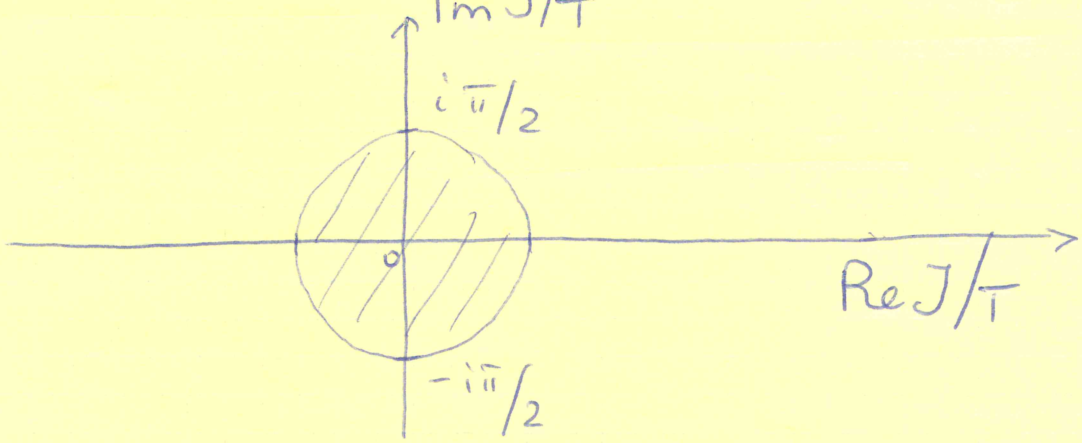
Замечание: f известна явно, можно записать асимптотики

$$f = \begin{cases} -|J| + \ldots, & |J|/T \gg 1 \text{ низко-}T \\ -T\left(\ln 2 + \frac{J^2}{2T^2} - \frac{J^4}{12T^4} + \ldots\right), \ (*) & |J|/T \ll 1 \text{ высокотем.} \end{cases}$$

Когда можно использовать высокотем. разложение $*$? (т.е. каков радиус сходимости ряда $*$?). Радиус сх. = расст. до ближайшей сингул. f в плоскости комплексного J/T, т.е.

$\operatorname{ch} J/T = 0 \Rightarrow J/T = \pm i\pi/2$

Вывод: ряд сходится при $|J/T| < \pi/2$.



III-5

Мораль: полезно рассматривать комплексные знач. параметров при изучении критич. явлений и аналитич. свойств.

Альтернативный способ решения (пусть $\vec{B} = 0$):

$$Z = \sum_{s_1=\pm 1} \cdots \sum_{s_N=\pm 1} e^{\beta \sum_{i=1}^{N} J s_i s_{i+1}} =$$

$$= \sum_{\{s\}} \prod_{i=1}^{N} e^{K s_i s_{i+1}} \qquad \boxed{K \equiv \beta J}$$

Заметим, что ($s_i = \pm 1 \ \forall i$):

$$e^{K s_i s_{i+1}} = \operatorname{ch} K + s_i s_{i+1} \operatorname{sh} K$$

$$Z = (\operatorname{ch} K)^N \sum_{\{s\}} \prod_{i=1}^{N} (1 + s_i s_{i+1} \operatorname{th} K)$$

Рассмотрим высокотемп. разложение $(K \ll 1)$:

$$\prod_{i=1}^{N}(1+s_i s_{i+1}\,\mathrm{th}\,K) = 1+\mathrm{th}\,K\sum(ss) + \mathrm{th}^2 K\sum(ssss)+\dots,$$

III-6 где, например, $\sum(ss) =$

$$= s_1 s_2 + s_2 s_3 + s_3 s_4 + \dots + s_N s_1$$

При суммир. по $s_1=\pm 1$, $s_2=\pm 1$ и т.д., мы получим

$s_2 - s_2$ от $s_1 s_2$, $s_3 - s_3$ от $s_2 s_3$

и т.д., т.е. $\sum(ss)=0$.

Более аккуратно:

$$Z = \mathrm{ch}^N K \sum_{s_1=\pm1}\cdots\sum_{s_N=\pm1}\Big[1+(s_1 s_2 + s_2 s_3 + \dots s_N s_1)\,\mathrm{th}\,K + \dots\Big] =$$

$$= \mathrm{ch}^N K \sum_{s_2=\pm1}\cdots\sum_{s_N=\pm1}\Big[2+2(s_2 s_3 + \dots s_{N-1}s_N)\,\mathrm{th}\,K + \dots\Big]$$

$$= \mathrm{ch}^N K \sum_{s_3=\pm1}\cdots\sum_{s_N=\pm1}\Big[4+4(s_3 s_4+\dots)\,\mathrm{th}\,K+\dots\Big]$$

$$= 2^N \mathrm{ch}^N K.$$

Таким обр.,

$$Z = 2^N \operatorname{ch}^N J/T ,$$

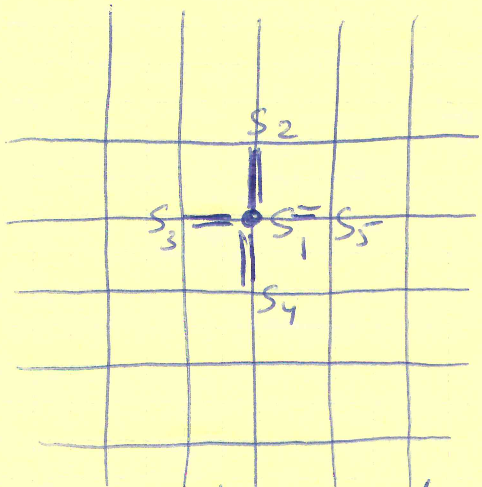
как и ранее.

III-7 Двумерная модель Изинга, $d_s = 2$, $\vec{B} = 0$

$$Z = \sum_{\{S_i = \pm 1\}} e^{K \sum_{\langle ij \rangle} S_i S_j}$$

$$Z = \sum_{\{S\}} \prod_{\langle ij \rangle} e^{K S_i S_j} = \sum_{\{S\}} \prod_{\langle ij \rangle} \sum_{k=0}^{1} C_k (S_i S_j)^k ,$$

где $C_0 \equiv \operatorname{ch} K$, $C_1 = \operatorname{sh} K$.



N вершин
L ребер

$$Z = \sum_{\{S\}} \sum_{k_1=0}^{1} \cdots \sum_{k_L=0}^{1} C_{k_1} \cdots C_{k_L} \prod_{l} (S_i S_j)^{k_l} ,$$

где $l = 1, \dots L$ соотв. парам $\langle ij \rangle$.
Например, S_1 присутствует в произвед.

$$(s_1 s_2)^{k_1}(s_1 s_3)^{k_2}(s_1 s_4)^{k_3}(s_1 s_5)^{k_4}$$

$$Z = \sum_{\{s\}} \sum_{\{k\}} C_{k_1} \cdots C_{k_L} \prod_i s_i^{\sum k_e},$$

где $\sum k_e$ – сумма по 4 ребрам $\forall i$.

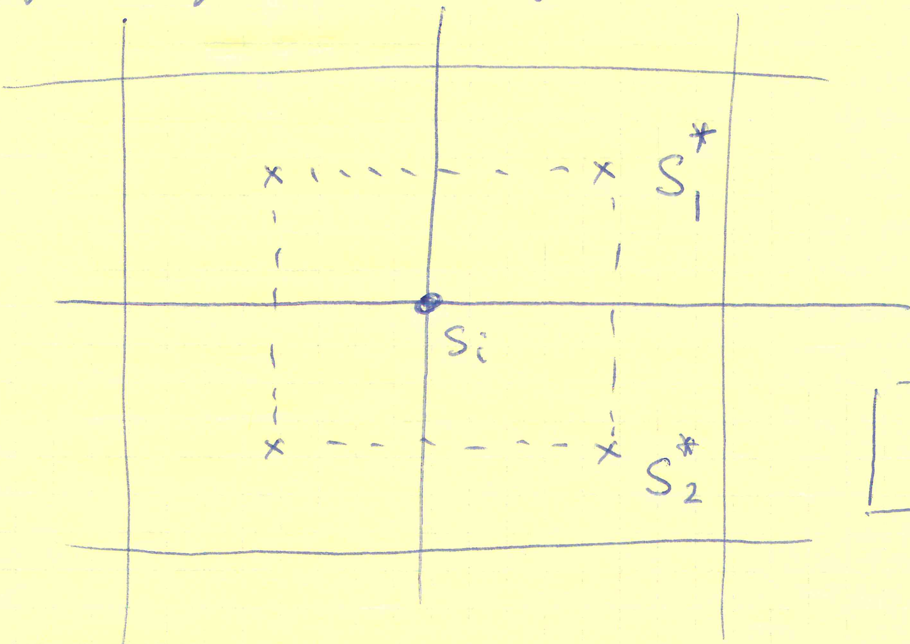
III-8

$$Z = \sum_{\{k\}} C_{k_1} \cdots C_{k_L} \prod_i \left(1 + (-1)^{\sum k_e}\right) =$$

$$= 2^N \sum_{\{k\}}{}' C_{k_1} \cdots C_{k_L}, \quad \text{где } '$$

означает наличие условия (связи) $\sum k_e = 0 \pmod 2$.

Сделаем так, чтобы это условие выполнялось автоматически: введем дуальную решетку и s_i^*:



$$\boxed{s_i^* = \pm 1}$$

III-9

$$K_1 = \frac{1}{2}\left(1 - s_1^* s_2^*\right)$$

$$K_2 = \frac{1}{2}\left(1 - s_1^* s_4^*\right)$$

$$K_3 = \frac{1}{2}\left(1 - s_2^* s_3^*\right)$$

$$K_4 = \frac{1}{2}\left(1 - s_3^* s_4^*\right)$$

Тогда: $K_1 + K_2 + K_3 + K_4 =$

$$= 2 - \frac{1}{2}\left(s_1^* s_2^* + s_1^* s_4^* + s_2^* s_3^* + s_3^* s_4^*\right) =$$

$$= 0 \pmod 2 \qquad \forall s_i^* = \pm 1.$$

$$Z = \frac{1}{2}\, 2^N \sum_{\{s^*\}} \prod_{\langle ij \rangle} C_{\frac{1}{2}(1 - s_i^* s_j^*)}$$

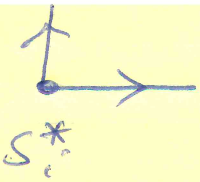
т.к. $\{s_i^*\}$ и $\{-s_i^*\}$ дают идент. конфиг. K.

Теперь заметим, что $(k = 0, 1)$:

$$C_k = \operatorname{ch} K\left(1 + k(\operatorname{th} K - 1)\right) =$$

$$= \operatorname{ch} K \exp\left[k \ln \operatorname{th} K\right] =$$

$$= (\operatorname{ch} K \operatorname{sh} K)^{1/2} \exp\left[-\frac{1}{2} s_i^* s_j^* \ln \operatorname{th} K\right]$$

Заметим также, что 

число пар $\langle ij \rangle = 2N$

Т. о.,

$$Z = \frac{1}{2}\left(2\,\mathrm{ch}K\,\mathrm{sh}K\right)^N \sum_{\{s^*\}} e^{K^* \sum\limits_{\langle ij \rangle} s_i^* s_j^*},$$

III-10

где $K^* = -\frac{1}{2}\ln \mathrm{th}\, K$

Или:

$$Z = \frac{1}{2}\left(\mathrm{sh}K^*\right)^{-N} \sum_{\{s^*\}} e^{K^* \sum\limits_{\langle ij \rangle} s_i^* s_j^*}$$

т. е. мы сделали замену „немых" переменных $s_i \to s_i^*$ и

$$\boxed{Z(K) = C(K)\, Z^*(K^*)},$$

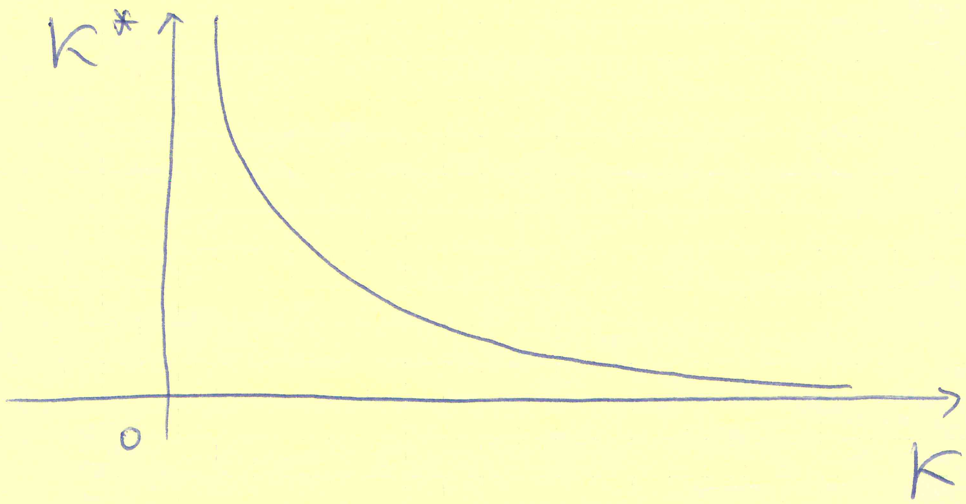
где $C(K) = \frac{1}{2}\left(2\,\mathrm{sh}K\,\mathrm{ch}K\right)^N =$
$= \tilde{C}(K^*) \equiv \frac{1}{2}\left(\mathrm{sh}K^*\right)^{-N}$, а

$Z^*(K^*)$ – это снова статсумма модели Изинга (на дуальной решетке), но с конст. связи

$$K^* = -\frac{1}{2}\ln \operatorname{th} K$$

(причем $K = -\frac{1}{2}\ln \operatorname{th} K^*$).

III-11 т.е. $\operatorname{sh} 2K \operatorname{sh} 2K^* = 1$



Малые K – большие K^* (и наоборот), т.е. $Z(K)$ при $K \gg 1$ может быть вычислена через $Z^*(K^*)$ (при $K^* \ll 1$).

Модель Изинга в $d_s = 2$ самодуальна – т.е. дуальное описание Z^* – тоже модель Изинга в $d_s = 2$.

- Если фаз. переход $\exists$ и единственен, то $K = K_c = K_c^* \Rightarrow \operatorname{sh} 2K_c = 1$

$$\Rightarrow K_c = -\frac{1}{2}\ln(\sqrt{2}-1) \approx 0.4407$$

Kramers-Wannier, 1941

Подтверждено точным решением (Onsager, 1944).

Модель Изинга в $d_s = 3$

III-12

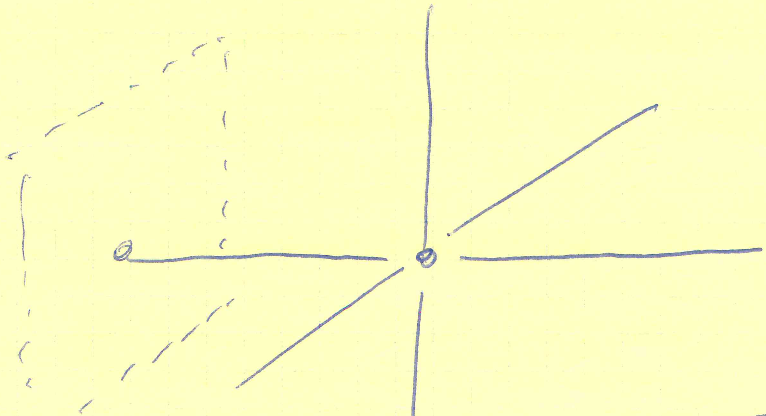
Точное реш. неизвестно (но см. недавние продвижения с пом. бутстрапа и т.д. — Slava Rychkov и др.

$$Z = \sum_{\{s=\pm 1\}} \exp\Big(K \sum_{\langle ij \rangle} s_i s_j\Big)$$

Аналогично $d_s = 2$, можно записать

$$Z = \sum_{\{k\}} \prod_l C_{k_l} \prod_i \left(1 + (-1)^{\sum k_l}\right),$$

где $\sum k_l$ — сумма по 6 ребрам



Как удовл. условию $\sum k_l = 0 \pmod 2$?

Построим дуальную 3d решетку, чьи вершины лежат в центрах кубов изначальной решетки, а ребра изнач. решетки $\perp$ плакетам дуальной решетки.

III-13 Ребрам дуальной решетки поставим в соответствие переменную $A_{i,\mu} = \pm 1$, $\mu = 1, 2, 3$ характериз. направления, исходящие из вершины i.

Введем:

$$K_{i,\mu} = \frac{1}{2}\left(1 - A_{i,\nu} A_{i,\lambda} A_{i+\lambda,\nu} A_{i+\nu,\lambda}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(1 - \prod_{\substack{\text{дуальн.} \\ \text{плакет}}} A_\nu\right) \quad \mu \neq \nu, \lambda$$

Тогда:

$$Z = 2^N \sum_{\{K\}} \prod_{\substack{\text{плакеты} \\ \equiv P}} C_{\frac{1}{2}(1-AAAA)}(K) =$$

$$= 2^N (\operatorname{ch} K \operatorname{sh} K)^{\frac{3N}{2}} \sum_{\{K(A)\}} e^{K^* \sum_P AAAA},$$

где $K^* = -\frac{1}{2} \ln \operatorname{th} K$, сумма по всем плакетам дуальной решетки.

Но это – действие Вильсона для

$\mathbb{Z}_2$ - калибров. теории на решетке.

То есть,

$$Z_{3d_s \text{ Изинг}}(K) = Z_{\substack{3d_s \\ \mathbb{Z}_2 \text{ калибр.} \\ \text{теор}}}(K^*) \cdot C(K^*)$$

III-14

В данном случае, степени своб. дуальной теории ($A_{i,\mu}$) отл. от степ. свободы первонач. теории (S_i).

В более общих случаях:

переменные: s_i $A_{i,\mu}$ $B_{i,\mu\nu}$ ...

Если p – число индексов (μ, ν ...),

то $p^* = d_s - p - 2$.

Модели с $p = p^* = \frac{d_s - 2}{2}$ самодуальны,

напр., Изинг в $d_s = 2$.

Замечание:

дуальность в моделях стат. мех. на решетке в случае абелевых групп симметрий ($\mathbb{R}$, S^1, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}_N$) хорошо изучена в рамках гармонического анализа (анализа Фурье на абелевых группах). Это связано с тем, что характеры абелевой группы сами образуют абелеву группу.

Дуальность в случае неабелевых групп симметрий (КХД на решетке и т.д.) понята плохо. В этом случае (дуальность Танаки – Крейна) возникают алгебры Хопфа, но не вполне понятно (мне), как это применить в нар. хоз.

III-15

См. литературу в списке, особ. Savit.
→ Свежая работа – D. Tong, 2019.

Некоторые другие примеры дуальности

• Дуальность между моделями синус-Гордона (sine-Gordon) и Тирринга (W. Thirring) в $d = 2 = 1+1$.

$$S_{SG} = \int d^2x \left(\frac{1}{2} \partial_\mu \phi \, \partial^\mu \phi + \frac{\alpha}{\beta^2} (\cos \beta\phi - 1) \right)$$

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} (\partial_\mu \phi)(\partial^\mu \phi) - \frac{\alpha \phi^2}{2} + \frac{\alpha \beta^2 \phi^4}{4!} + \ldots$$

$$\Box \phi + \frac{\alpha}{\beta} \sin \beta\phi = 0 \quad \text{ур. движ.}$$

2 вида квант. возбужд.

— мезоны (пертурб.) $M_{mes} = \sqrt{\alpha}$, $\beta^2 \ll 1$

— солитоны (непертурб.) $M_{sol} = \dfrac{8\sqrt{\alpha}}{\beta^2}$.

при $\beta^2 \gg 1$ — лёгкие

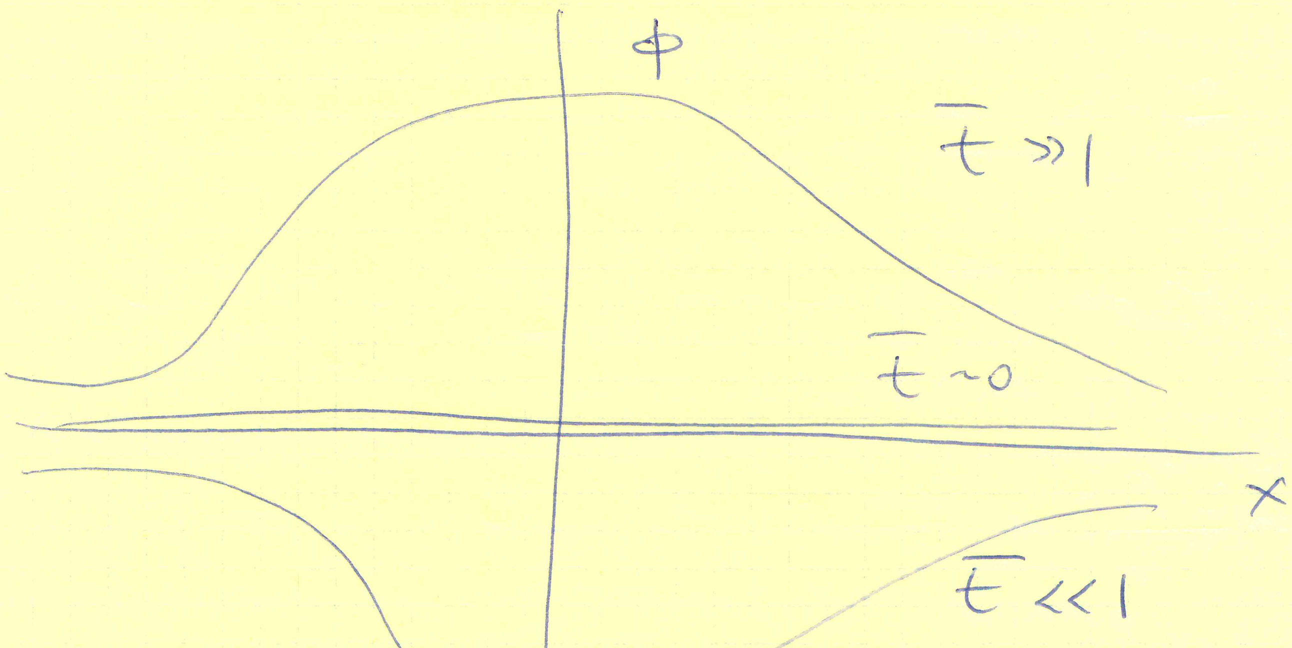
<u>См. книгу Раджарамана.</u>

III-16

Мезоны — квантование на фоне решения $\Phi_0 = 0$.

Солитоны — квант. на фоне решения

$$\bar{\Phi}_0 = 4 \operatorname{arctg} \left[\frac{\operatorname{sh} \frac{u\bar{t}}{\sqrt{1-u^2}}}{u \operatorname{ch} \frac{\bar{x}}{\sqrt{1-u^2}}} \right]$$



Замечание: $M_{sol} \gg M_{mes}$ при $\beta^2 \ll 1$ (и наоб.).

т.е. в перт. реж. солитоны „не видны", а в неперт. реж. „не видны" мезоны.
В режиме $\beta^2 \sim 1$ оба вида квантов присутствуют.

Модель синус-Горд. дуальна модели Тирринга:

III-17 $$S_T = \int d^2x \left(\bar{\psi} i \gamma_\mu \partial^\mu \psi + m \bar{\psi}\psi - \frac{g}{2} \bar{\psi}\gamma^\mu\psi \cdot \bar{\psi}\gamma_\mu\psi \right)$$

SG = Thirring (бозонизация)

При этом:

$$\boxed{\begin{aligned} \frac{\beta^2}{4\pi} &= \frac{1}{1+g/\pi} \\ \frac{\alpha}{\beta^2}\cos\beta\phi &= -m\bar{\psi}\psi \\ -\frac{\beta}{2\pi}\epsilon^{\mu\nu}\partial_\nu\phi &= \bar{\psi}\gamma^\mu\psi = j^\mu \end{aligned}}$$

$$Q = \int_{-\infty}^{\infty} j_0\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} \bar{\psi}\gamma_0\psi\, dx = \frac{\beta}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial\phi}{\partial x}\, dx.$$

SG — Thirring

солитон ⟷ фунд. фермион

мезон ⟷ фермион-антиферм. (связ. состояние)

III-18

Глубже → см. книгу Раджарамана

Нек. уроки дуальности

1. Дуальность может отображать сильновзаим. системы в слабовз. (но бывают и weak-weak duality)

2. Дуальность отобр. фундамент. кванты в солитоны и заряды Нётер в топол. заряды.

3. Связана с геом. концепциями, напр. преобраз. Фурье, гармонич. анализ).

Замечания:

- дуальность может быть рассмотрена в $d=4$ КТП с калибр. группами (дуальность Монтонена–Олива), особенно в системах с доп. симметр. (суперсимметрией) – см. Harvey TASI lectur.

III-19

- аналог мезонов – монополей – электр / магнитные степ. своб. – – в том же смысле (элем. возб. и монополи).
- дуальность Сайберга–Виттена (Seiberg–Witten) $N=2$ SYM
- обобщения на низкоэнерг. теорию струн – паутина дуальностей
- простр. модулей монополей – Хитчин.
- программа Лэнглендса (Langland)
- результаты в 3d (Гайотто и т.д.)

Мотивация для изучения дуальности:

найти удобную замену переменных для калибр. теор (КХД и т.д.) в режиме сильной связи.

Струнно-калибр. дуальность явл. (частичным) ответом на этот вопрос

$$Z_{\substack{gauge \\ th}}[J] = Z_{string}[\tilde{J}],$$

III-20

причем дуальные степ. свободы $\exists$ в другом числе измерений и вкл. гравитацию.