Лекция 2. Дуальность. Примеры.

II-1 Дуальность (двойственность) – слово, используемое в разных областях и разных контекстах (напр., двойственность Понтрягина). В нашем случае дуальность означает изоморфизм между двумя наборами переменных, описывающими один и тот же объект (см. картинку Л. Витгенштейна), т.е. как замену переменных в функц. интеграле

$$Z_{\mathcal{O}}[J;a] = \int [d\phi]\, e^{-S_E[\phi;a] + J\mathcal{O}(\phi)}$$

a – парам. теории

$\mathcal{O}(\phi)$: операторы (элементарные, напр., $\mathcal{O}=\phi$, или составные: $\mathcal{O} = T^{\mu\nu}(\phi)$)

чьи корреляц. функции нас интересуют

$$\langle \mathcal{O} \rangle_X, \quad \langle \mathcal{O}(x)\mathcal{O}(y) \rangle_X \text{ и т. д.},$$

где X – квантовое состояние (вак. и т.д.) системы (в функц. интеграле – гран. усл. на ϕ).

Замечание: ϕ – переменные интегрир., $Z_{\mathcal{O}}$ от них не зависит. Выберем удобные.

Замена переменных:

$$Z_{\Theta}^{(I)}[J;a] = \int [d\phi]\, e^{-S_E[\phi;a] + J\Theta(\phi)}$$

II-2

$$= C(\tilde{J}) \int [d\xi]\, e^{-S_E[\xi;\tilde{a}] + \tilde{J}\Theta(\xi)} =$$

$$= C(\tilde{J})\, Z_{\Theta}^{(II)}[\tilde{J};\tilde{a}].$$

Пример (очень простой)

$$Z(\alpha) = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-\alpha^2 x^2}}$$

Пертурбативное решение:

$$\frac{1}{\sqrt{1-\alpha^2 x^2}} = 1 + \frac{\alpha^2 x^2}{2} + \ldots$$

$$Z(\alpha) = 1 + \frac{\alpha^2}{6} + \ldots$$

Замена переменных

Точное решение: $x \to y : \alpha x = \sin y$

$$Z(\alpha) = \frac{1}{\alpha} \int_0^{\arcsin\alpha} dy = \frac{\arcsin\alpha}{\alpha} = 1 + \frac{\alpha^2}{6} + \ldots$$

точное реш.

Пример (менее простой):

$$Z(\alpha) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x+\frac{\alpha}{x})^2} dx = \sqrt{\pi}\, e^{-4\alpha}.$$

Пример: формула суммирования Пуассона (док. см. Курант-Гильберт, т. I)

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} f(n) = \sum_{m\in\mathbb{Z}} \hat{f}(m)$$

II-3

$\hat{f}$ – преобр. Фурье $f \in C^\infty(\mathbb{R})$:

$$\hat{f}(b) = \int_{-\infty}^{\infty} f(a)\, e^{2\pi i b a}\, da$$

При $f(a) = e^{-\beta\pi a^2}$, $\hat{f}(b) = \beta^{-\frac{1}{2}} e^{-\pi b^2/\beta}$,

т.е. (преобраз. Якоби):

$$\boxed{\sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{-\pi n^2\beta} = \frac{1}{\sqrt{\beta}} \sum_{m\in\mathbb{Z}} e^{-\pi m^2/\beta}}$$

Применение в нар. хозяйстве:
(см. Квасников, „Стат. физ", гл. 2, §3, „Идеальные неодноатомные газы")

$$Z = Z_0 (z_{внутр})^N$$

$$z_{внутр} = z_{rot}\, z_{osc}\, z_{electr.}$$

1) $Z_{osc} = tr\,\hat{\rho} = tr\, e^{-\beta \hat{H}}$

$$\hat{H}\psi = E\psi \qquad E_n = \hbar\omega(n + 1/2)$$

$$Z_{osc} = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\beta\hbar\omega n} \cdot e^{-\beta\hbar\omega/2} =$$

II - 4

$$= e^{-\beta\hbar\omega/2} \frac{1}{1 - e^{-\beta\hbar\omega}} = \frac{1}{2\,\mathrm{sh}\,\frac{\beta\hbar\omega}{2}}.$$

Можно вычислить:

$$\mathcal{E} = T^2 \frac{\partial \ln Z}{\partial T}$$

$$c = \partial\mathcal{E}/\partial T \qquad \text{и т. д.}$$

2) Z_{rot} $\qquad E_{lm} = \frac{\hbar^2}{2I} l(l+1)$

$(d_s = 3)$

↑ space

$\left.\begin{array}{l} l = 0, 1, 2 \ldots \\ m: -l, \ldots l. \end{array}\right\}$ Ротатор

$$Z_{rot} = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{l} e^{-\frac{\hbar^2}{2I}\beta\, l(l+1)} =$$

$$= \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1)\, e^{-\frac{\hbar^2}{2I}\beta\, l(l+1)}.$$

Уже сложно.

Эйлер-Макларен (Euler - Maclaurin)

Попробуйте $d_s = 2$ (двумерный квант. ротатор)

$$-\frac{\hbar^2}{2I}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\psi = E_\ell\,\psi$$

$$E_\ell = \frac{\hbar^2}{2I}\ell^2, \quad \ell\in\mathbb{Z}$$

$\underline{\text{II}}$-5

$$Z_{rot} = \sum_{\ell\in\mathbb{Z}} e^{-\beta\frac{\hbar^2\ell^2}{2I}} = \sum_{\ell\in\mathbb{Z}} e^{-\pi\bar\beta\ell^2},$$

$$\bar\beta \equiv \frac{\hbar^2\beta}{2I}.$$

а) $\bar\beta \gg 1$: $\quad Z_{rot} \approx 1 + 2e^{-\pi\bar\beta} + \ldots$

низк. темп.

б) $\bar\beta \ll 1$: высок. темп.

$$Z_{rot} = \frac{1}{\sqrt{\bar\beta}}\sum_{m\in\mathbb{Z}} e^{-\pi m^2/\bar\beta} \approx \bar\beta^{-1/2} + \ldots$$

(по формуле Пуассона).

<u>Замечание</u> : $Z_{rot}(\beta) = \Theta_3(\beta, 0)$,

одна из тэта-функций Якоби (см. Мамфорд)

$$Z_{rot}(\beta) = \sqrt{\beta}\,Z_{rot}(1/\beta)$$

(дуальность между низко- и высоко-темп. режимами)

Замечание: более общая формула Якоби

$$1 + 2\sum_{n\in\mathbb{N}} \cos(2\pi n x)\, e^{-\pi n^2 t} =$$

II-6 $$= \frac{1}{\sqrt{t}} \sum_{m\in\mathbb{Z}} e^{-\frac{\pi(x-m)^2}{t}}$$

полезна в КТП.

Обобщения формулы Пуассона на неаб. случай ≡ формула следа Сельберга (см. Н. Харт, „Геом. квантование в действии"). Это часть гармонич. анализа. Важное приложение абелевого случая — дуальность Крамерса – Ванье в стат. мех. на решетке.

Пример (см. J. Harvey, hep-th/9603086)

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{m\omega^2 \hat{x}^2}{2} \qquad [\hat{p}, \hat{x}] = -i\hbar$$

$\hat{H}$ самодуален при преобразовании

$$D:\ \hat{x} \to \hat{X} = \hat{p}/m\omega\ ,\ \hat{p} \to \hat{P} = -m\omega\hat{x}$$

Преобраз. D – канонические, т.к.

$$[\hat{P}, \hat{X}] = [\hat{p}, \hat{x}] = -i\hbar.$$

$$D^2 = P \quad (\text{четность}) : \begin{cases} \hat{x} \to -\hat{x} \\ \hat{p} \to -\hat{p} \end{cases}$$

II-7

<u>Замечание</u>: Волновая функция основн. состояния и ее преобр Фурье преобр. друг в друга при действии D (преобр. Фурье Гаусса = Гаусс).

<u>Дуальность Крамерса–Ванье (1941)</u>