On thermodynamics of $\mathcal{N}=4$ SYM (continued)

Entropy density:

$$s = S/V_3 = \frac{2\pi^2}{3} N_c^2 T^3 f(\lambda)$$

$N_c \to \infty$, $\forall \lambda$

$$f(\lambda) = \begin{cases} 1 - \frac{3}{2\pi^2}\lambda + \dots, & \lambda \ll 1 \\ 3/4 + \mathcal{O}\left(\lambda^{-3/2}\right), & \lambda \gg 1 \end{cases}$$

For a d-dimensional CFT we have

$$s = a f(\lambda)\, T^{d-1}$$

$$\Rightarrow s = \left.\frac{\partial P}{\partial T}\right|_\mu \Rightarrow P = \frac{1}{d} a f(\lambda) T^d$$

$$\Rightarrow \mathcal{F} = -pV = E - T\cdot S \Rightarrow \varepsilon = Ts - P$$

$$\Rightarrow \varepsilon = \frac{d-1}{d} a f(\lambda) T^d = (d-1)P.$$

This is expected since for CFT $T^\mu{}_\mu = 0$

$$\Rightarrow \mathrm{tr}\begin{pmatrix} -\varepsilon & & \\ & P & \\ & & \ddots \\ & & & P \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \varepsilon = (d-1)P.$$

Энтропия $N=4$ SYM в планарном пределе $(N_c \to \infty)$

Для d-мерной CFT, плотность энтр.

$s = S/V_{d_s}$ $\quad (d_s + 1 = d)$ равна

$$s = \alpha T^{d_s} \quad \text{(по размерности)},$$

где α может зависеть от парам. теории.

1) $\lambda = 0$ Идеальный газ $N=4$ SYM в $d=4$

Для одной скал. ст. своб. (бозонной)

$$F = -\frac{V_3 T^2}{90 (\hbar c)^3} (k_B T)^4$$

см ЛЛ т.5
или Квасников

У нас $\mu = 0$ и

$$F = -p V_3 \quad \text{и} \quad s = \partial P / \partial T$$

$$F = -\frac{\pi^2 T^4}{90} V_3 \Rightarrow s = -\partial f / \partial T,$$

где $f \equiv F / V_3$

Т.е. $\quad s = 4 \cdot \frac{\pi^2 T^3}{90}$ для 1 ст. св.

Для фермионов: $\mathcal{F}_F = \frac{7}{8} F_B$.

В $\mathcal{N}=4$: 8 бозонных ст. св. и 8 фермионных. $\otimes$ N_c^2-1 штук.

$$S = 4 \cdot \frac{\pi^2 T^3}{90} (N_c^2-1) \left[8 + 8 \cdot \frac{7}{8} \right] =$$

$$= \frac{4 \cdot 15}{90} \pi^2 T^3 (N_c^2-1) = \frac{2}{3} \pi^2 (N_c^2-1) T^3$$

При $N_c \to \infty$: $S \to \frac{2}{3} \pi^2 N_c^2 T^3$.

2) $\lambda \to \infty$ (и $N_c \to \infty$)

$$S = \frac{k_B A_H}{4 \ell_p^{d-2}} = \frac{k_B A_H c^3}{4 G_d \hbar}$$

$d = 10$. $16\pi G_{10} = (2\pi)^7 g_s^2 \ell_s^8$

$$ds_{10}^2 = \frac{(\pi T L)^2}{u} \left(-f dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2 \right) +$$

$$+ \frac{L^2}{4u^2 f} du^2 + L^2 d\Omega_5^2$$

$$A_H = \int d^3x\, d\Omega \sqrt{\det g^{ind}}$$

Индуц. метрика: $t = const$

$u = u_H = 1 = const$

$$ds^2_{ind} = \frac{(\pi T L)^2}{u}(dx^2 + dy^2 + dz^2) + L^2 d\Omega_5^2$$

$$g_{ind} = \left(\frac{(\pi T L)^2}{u_H}\right)^3 L^{10} \det \Omega_5$$

$$A_H = \int dx\, dy\, dz\, d\Omega_5 \frac{\pi^3 T^3 L^3}{u_H^3} L^5 \sqrt{\det \Omega_5}$$

$$= \pi^3 T^3 T^8 V_3 \cdot \underset{\pi^3}{\underset{\parallel}{A_{S^5}}} = \pi^6 L^8 V_3 \cdot T^3$$

Также: $\begin{cases} L^4 = \ell_s^4 g_{YM}^2 N_c \\ g_{YM}^2 = 4\pi g_s \end{cases}$

Получаем $s_{\lambda=\infty} = \dfrac{\pi^2 N_c^2 T^3}{2}$.

$$\boxed{\text{Т.е. } s_{\lambda=\infty} = \frac{3}{4} s_{\lambda=0}.}$$