24 мая 2019 г. ①

$$G_{\mu\nu,\alpha\beta}(x-y) = -i\,\theta(x^0-y^0)\langle [T_{\mu\nu}(x), T_{\alpha\beta}(y)]\rangle$$

$$G_{\mu\nu,\alpha\beta}(x-y) = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}\, e^{ik(x-y)}\, G_{\mu\nu,\alpha\beta}(k)$$

$G_{\mu\nu,\alpha\beta} = G_{\alpha\beta,\mu\nu}$ (CPT инвар. состояния)

$G_{\mu\nu,\alpha\beta} = G_{\nu\mu,\alpha\beta} = G_{\mu\nu,\beta\alpha}$ (симм. $T_{\mu\nu}$)

$k^\mu G_{\mu\nu,\alpha\beta} = 0$ (тожд. Уорда) – сохр. $T_{\mu\nu}$

(*) $\eta^{\mu\nu} G_{\mu\nu,\alpha\beta} = 0$ (тожд. Уорда – масшт. инвар.)

$G_{\mu\nu,\alpha\beta}(k^0, \bar{k}) = G^*_{\mu\nu,\alpha\beta}(-k^0, \bar{k})$

(эрмит. + изотропия)

Если $P_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} - \dfrac{k_\mu k_\nu}{k^2}$, то,

используя ингредиенты $\eta_{\mu\nu}\eta_{\alpha\beta}$, $k_\mu k_\nu k_\alpha k_\beta$ и т.д., получим для вак. сост.:

$$G_{\mu\nu,\alpha\beta} = P_{\mu\nu} P_{\alpha\beta}\, G_B(k^2) + H_{\mu\nu,\alpha\beta}\, G_S(k^2)$$

(подробнее – см 0506184 (hep-th)

(В масшт.-инв. теории $G_B = 0$).

В сост. с $T \neq 0$ (но изотропном), вместо 2-х функ. G_B и G_s имеются 5. А в масшт.-инв. теории – 3:

$$G_{\mu\nu,\alpha\beta}(K) = S_{\mu\nu,\alpha\beta}\, G_1(K_0, \bar{K}^2) +$$

$$+ \Phi_{\mu\nu,\alpha\beta}\, G_2(K_0, \bar{K}^2) + L_{\mu\nu,\alpha\beta}\, G_3(K_0, \bar{K}^2).$$

В дуальной гравитации им соотв. калибр-инв. перем. Z_1, Z_2, Z_3.

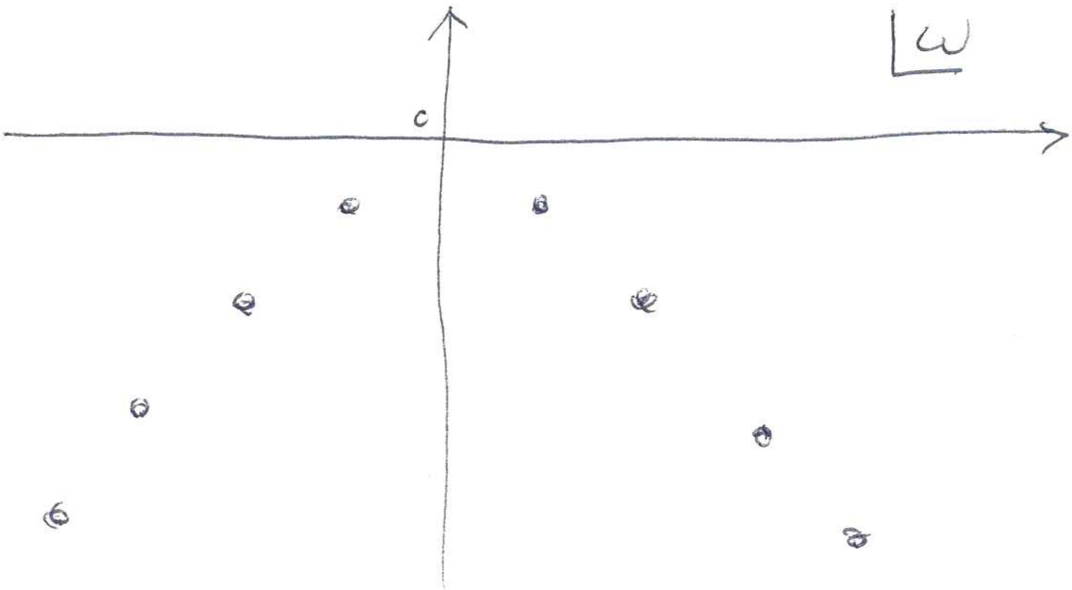
$$Z_3'' - \frac{1+u^2}{uf} Z_3' + \frac{\bar{\omega}^2 - \bar{q}^2 f}{u f^2} Z_3 = 0$$

$$Z_3 = A_{(3)}(1+\dots) + B_{(3)} u^2 (1+\dots)$$

$$G_3 = -\frac{\pi^2 N_c^2 T^4 B_{(3)}}{A_{(3)}}$$

$$Z_3(u=0) = 0 \Rightarrow A_{(3)} = 0 \Rightarrow \omega = \omega(q)$$

– квазинор. спектр.



Асимпт. $i\omega_n = 2\pi T n(\pm 1 - i)$, $n \to \infty$

R. Schiappa, hep-th/0411267.

Аналит. реш. в пределе $\bar{\omega} \ll 1$, $\bar{q} \ll 1$

$$A_{(3)} = 1 + O(\bar{\omega}^2)$$

$$B_{(3)} = i\bar{\omega}/2 + O(\bar{\omega}^2, \bar{q}^2, \bar{\omega}\bar{q})$$

$$G_{xy,xy} = -\frac{\pi^2 N_c^2 T^4}{2} \frac{B_{(3)}}{A_{(3)}} = -\frac{\pi^2 N_c^2 T^4}{4} i\bar{\omega}$$

$$= -\frac{i\pi N_c^2 T^3}{8} \omega + \dots$$

Грин–Кубо: (см. 0704.0240 hep-th)

$$\eta = \lim_{\omega \to 0} \frac{1}{2\omega} \int dt\, d^3x\, e^{i\omega t} \langle [T_{xy}(x) T_{xy}(0)] \rangle_T$$

$$= \frac{\pi}{8} N_c^2 T^3$$

Более общие ф. Кубо – см. 1610.01081 и ссылки там.

Т.о., в $\mathcal{N}=4$ SYM $SU(N_c)$ в пределе $N_c \to \infty$, $\lambda = g^2_{YM} N_c \to \infty$:

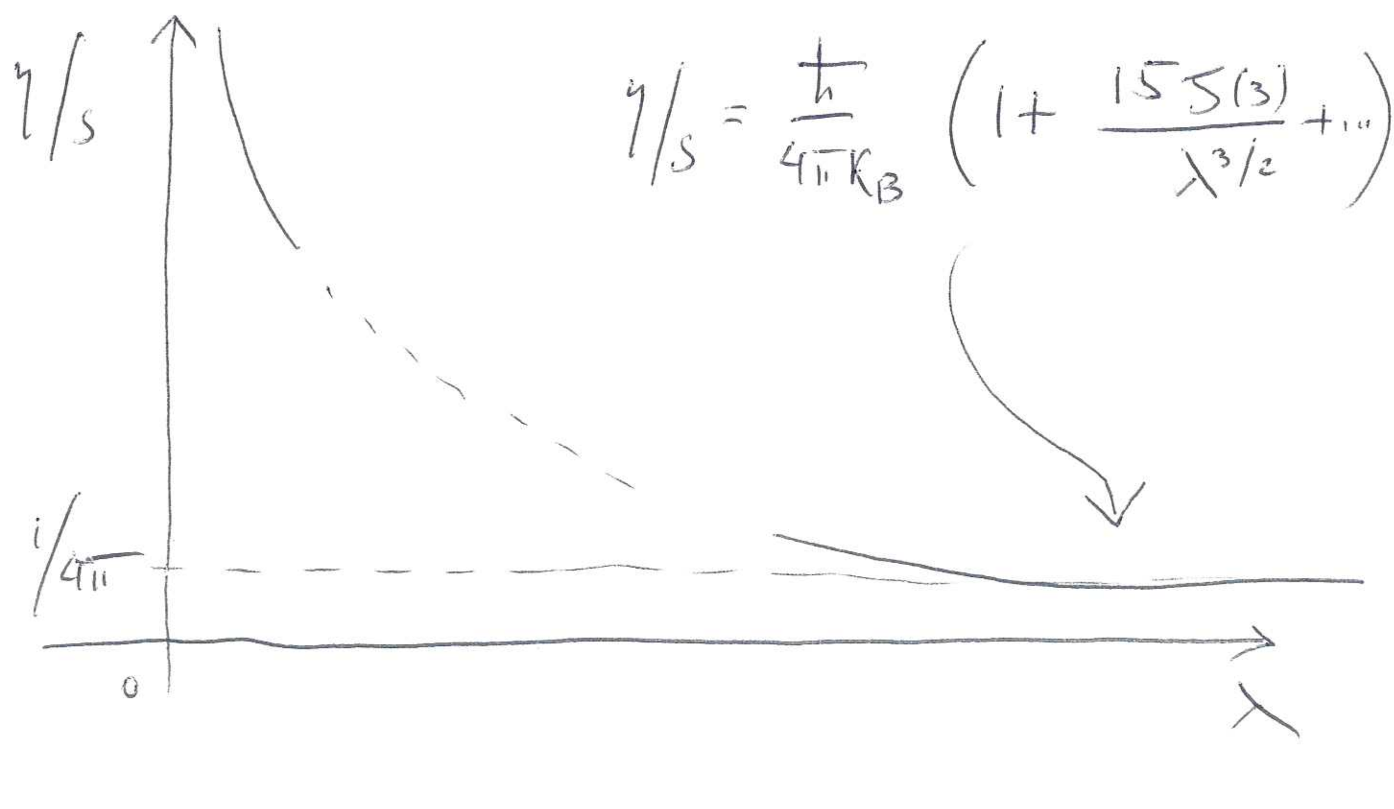
$$\eta = \frac{\pi}{8} N_c^2 T^3.$$

Т.е. $\eta = f(\lambda)\, N_c^2 T^3$ $(N_c \to \infty)$,

$$f(\lambda) = \begin{cases} \lambda^{-2} \ln^{-1} \frac{1}{\lambda}, & \lambda \ll 1 \quad (\text{кин. теор}) \\ \frac{\pi}{8}, & \lambda \gg 1 \end{cases}$$

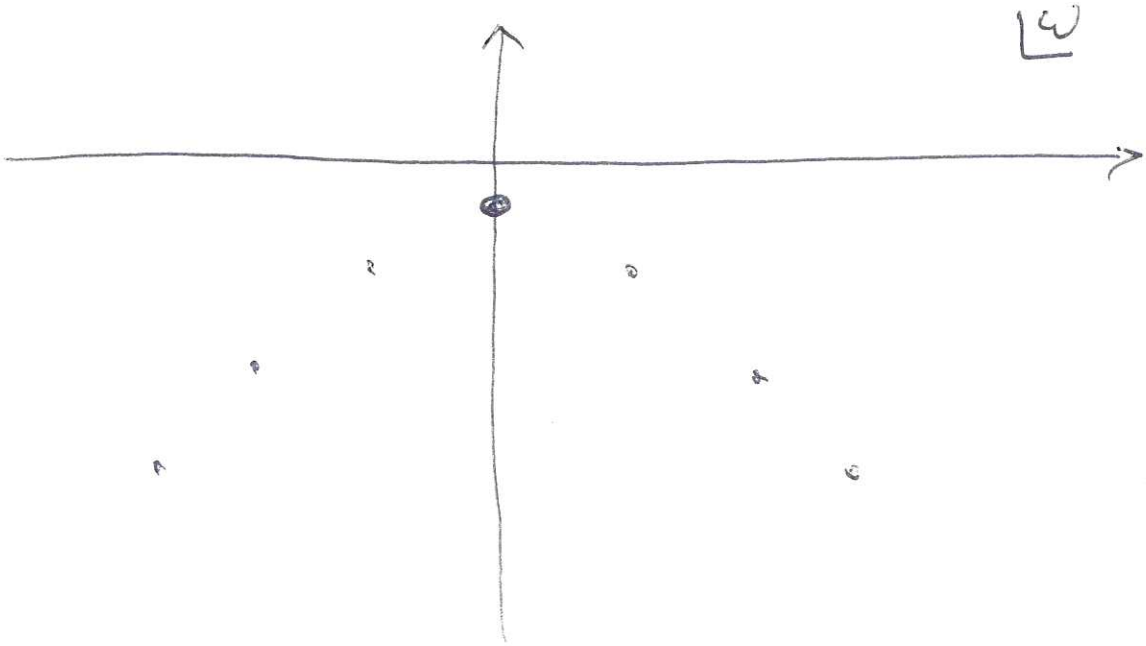
Для η/s : $(N_c \to \infty)$

$$\eta/s = \frac{\hbar}{4\pi k_B}\left(1 + \frac{15\zeta(3)}{\lambda^{3/2}} + \ldots\right)$$



$$Z_1'' + \frac{(\bar{\omega}^2-\bar{q}^2 f) f - u\bar{\omega}^2 f'}{u f(\bar{q}^2 f - \bar{\omega}^2)} Z_1' + \frac{\bar{\omega}^2-\bar{q}^2 f}{u f^2} Z_1 = 0$$

$$G_1 = -\frac{\pi^2 N_c^2 T^4 \, \mathcal{B}_{(1)}}{\mathcal{A}_{(1)}}$$



$$\mathcal{A}_{(1)} = 1 + \frac{i\bar{q}^2}{2\bar{\omega}} + O(\bar{\omega}^2, \bar{q}^2, \bar{\omega}\bar{q})$$

$$\mathcal{B}_{(1)} = \frac{i(\bar{\omega}^2-\bar{q}^2)}{2\bar{\omega}} + O(\bar{\omega}^2, \bar{q}^2, \bar{\omega}\bar{q})$$

$$G_1(\omega, q) = \frac{\pi N_c^2 T^3 (\omega^2 - q^2)}{4\left(i\omega - q^2/4\pi T\right)} + \ldots$$

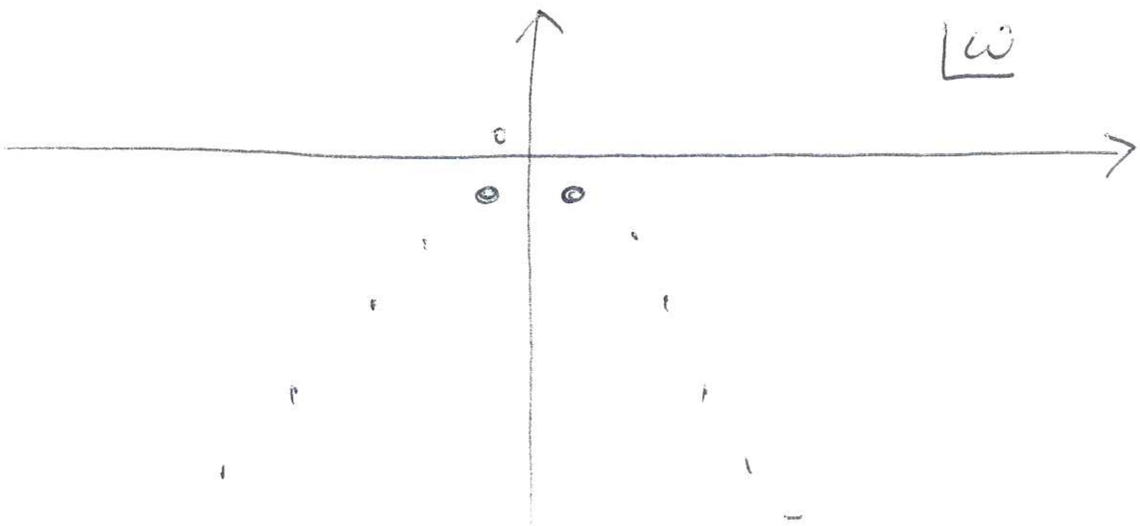
$$\omega, q / 2\pi T \to 0$$

Звук:

$$Z_2'' + F(u,\bar{\omega},\bar{q})\,Z_2' + G(u,\bar{\omega},\bar{q})\,Z_2 = 0$$

$$Z_2 = \mathcal{A}_{(2)}(1+\cdots) + \mathcal{B}_{(2)}u^2(1+\cdots)$$

$$G_2 = -\frac{N_c^2\pi^2T^4\,\mathcal{B}_{(2)}(\bar{\omega},\bar{q})}{\mathcal{A}_{(2)}(\bar{\omega},\bar{q})}$$



$$Z_2(u) = C_2\, f(u)^{-i\bar{w}/2}\left[\frac{\bar{q}^2(1+u^2)-3\bar{w}^2}{4\bar{q}^2} - \frac{i\bar{w}}{2}f(u)\right] + O(\bar{w}^2,\bar{q}^2,\bar{w}\bar{q}).$$

$$Z_2 = 0 \;\left(\mathcal{A}_2 = 0\right) \Rightarrow$$

$$\bar{w} = \pm\frac{\bar{q}}{\sqrt{3}} - \frac{i\bar{q}^2}{3} + O(\bar{q}^3)$$

$$\omega(q) = \pm v_s q - i\frac{\Gamma}{2}q^2 + O(q^3)$$

$$\frac{v_s}{c} = 1/\sqrt{3} \qquad \frac{\Gamma}{2} = 1/6\pi T$$

$$\Gamma = \frac{4\eta/3}{\epsilon + P} = \frac{4}{3}\frac{\eta}{sT}$$

$$\Rightarrow \eta/s = 1/4\pi .$$

<u>Далее:</u>

$$\bar{w} = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}\bar{q} - \frac{i}{3}\bar{q}^2 \pm \frac{3 - 2\ln 2}{6\sqrt{3}}\bar{q}^3 -$$

$$- \frac{i(\pi^2 - 24 + 24\ln 2 - 12\ln^2 2)}{108}\bar{q}^4 + O(\bar{q}^5)$$

Сравнить с гидрод. 2-го и высших порядков. См. 0712.2451 и 1507.02461

Гидродинамика (продолжение)

$$T^{\mu\nu} = \langle \hat{T}^{\mu\nu} \rangle$$

$$T^{\mu\nu} = T^{\mu\nu}_{eq} + \delta T^{\mu\nu} \qquad T^{\mu\nu}_{eq} = \begin{pmatrix} \epsilon & & & \\ & p & & \\ & & p & \\ & & & p \end{pmatrix}$$

$$\delta T^{\mu\nu} \sim e^{-i\omega t + iqz} \quad \text{(изотропия)}$$

$$\begin{cases} -\omega\, \delta T^{0a} + q\, \delta T^{za} = 0 & a = x, y, \ldots \\ -\omega\, \delta T^{00} + q\, \delta T^{z0} = 0 & \\ -\omega\, \delta T^{0z} + q\, \delta T^{zz} = 0 & \end{cases}$$

(следствие $\partial_\mu T^{\mu\nu} = 0$)

Функц. ст. своб.: δT^{00}, δT^{0i}

$$\delta T^{ij} = \delta T^{ij}\left(\delta T^{00}, \delta T^{0i}\right)$$

$$\delta T^{ij} = \delta^{ij} \frac{\partial p}{\partial \epsilon}\, \delta T^{00} -$$

$$- \frac{1}{\epsilon + p}\Big[\eta\left(\partial_i\, \delta T^{0j} + \partial_j\, \delta T^{0i} - \frac{2}{d_s}\, \delta^{ij}\, \partial_k\, \delta T^{0k}\right) + \zeta\, \delta^{ij}\, \partial_k\, \delta T^{0k}\Big] + \ldots$$

⑨

Тогда система ур. имеет нетрив. реш. ($\det M = 0$), если

$$P(\omega, q^2) = (\omega + iDq^2)^{d_s - 1}(\omega^2 + i\Gamma\omega q^2 - v_s^2 q^2) = 0$$

$$v_s^2 = \partial p/\partial \epsilon$$

$$D = \eta/(\epsilon + P) .$$

$$\Gamma = \frac{1}{\epsilon + p}\left(\zeta + \frac{2d_s - 2}{d_s}\eta\right)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \omega = -iDq^2 + \dots \\ \omega = \pm v_s|q| - i\frac{\Gamma}{2}q^2 + \dots \end{cases}$$

<u>Другой путь:</u> изотропия $\longrightarrow$

$$\delta T^{nm} = -iA(q^n \delta T^{om} + q^m \delta T^{on}) + \delta T^{oo}(Bq^n q^m + C\delta^{nm}) + iq_l \delta T^{ol}(Dq^n q^m + E\delta^{nm})$$

$\Rightarrow$

$$\mathcal{D} = F_{shear}^{d_s - 1} \, F_{sound} = 0$$

$$\begin{cases} F_{shear} = \omega + i q^2 \gamma_\eta(\omega, q^2) = 0 \\ F_{sound} = \omega^2 + i\omega q^2 \gamma_s(\omega, q^2) - q^2 H(q^2, \omega) = 0 \end{cases}$$

$$\gamma_\eta = A \qquad \gamma_s = 2A - E - Dq^2$$

$$H = Bq^2 + C$$

$\Rightarrow$ общий анализ дисп. соотнош. и сходимости гидрод. рядов

см. 1904.12862