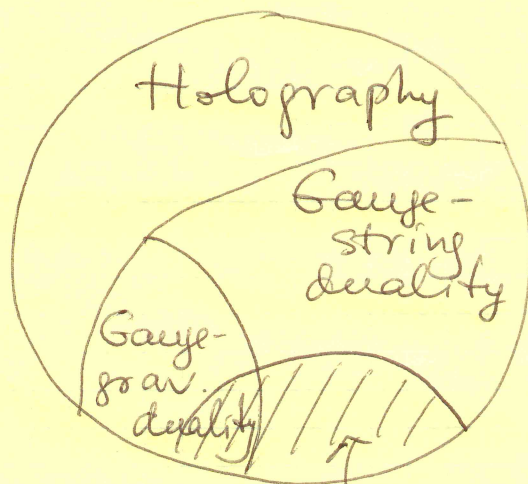


I-0

- Вверхние в методы струнно-кампорбовочной дуальности
- Терминологический экскурс



Иногда 4 термина используются как синонимы, это, строго говоря, неверно.

- Административный экскурс

1) ~ 10 лекций: краткий курс

2) [andrei.starinets@gmail.com](mailto:andrei.starinets@gmail.com) (Создать группу рассылки?)

3) Сайт Oxford physics:  
Lecture notes; задания

4) Литература; ссылки (раздать)

Рекомендовать список лит.  
Online lectures

5) Вопросы?

I-1

Введем в методологию струнно-калибровочной дуальности

Лекция 1 : Введем. Мотивировка.

1. Физика кварк-глюонной плазмы (ядерная материя в экстремальных условиях)
2. "Страшные" металлы, графен (сильновзаимодействующие системы "многих тел" в физике конденсированного состояния) Физика ультрахолодных атомов  
Теория - за пределами теории жидкости Ландау. Высокой сверхпрот.
3. Общетеоретический интерес:
  - разработка новых непертурбативных методов
  - понимание гидродинамики как эффективной теории
  - связь между гидродинамикой и гравитацией
  - теоретическая лаборатория для изучения физики неравновесных процессов

Общие черты систем 1 и 2 :

- это системы "многих тел",  $N \sim 10^4$ , т.е. важны коллективные эффекты
- это квантовые системы ( $\lambda_{\text{de Broglie}} \gtrsim \ell$ )

I-2 Здесь  $l \sim (V_3/N)^{1/3}$  или  $l \sim l_{деп}$

- это системы с сильной взаимодействием между элементарными составляющими

пример:  $\alpha_s (TRHC) \sim 1$  (КХД)

т.е. теория возмущений по  $\alpha_s \ll 1$  неприменима ( $\alpha_s = g_{YM}^2 / 4\pi\hbar c$ )

Для сравнения:  $\alpha_{em} = e^2 / 4\pi\hbar c \approx 1/137 \ll 1$

Методы изучения систем многих частиц  
- квантовая статистика (нерел. системы)  
или КТП при конечной  $T$  и плотности  
(рел. системы)

### Равновесные свойства

(Термодинамика:

$P, S, F, \Omega$ ;  
уравнен. состояния

$$\varepsilon = \varepsilon(P); \nu_s.$$

Фазовые переходы и  
критич. индексы)

пертурбативные  
методы  
(диагр. Фейнмана)

непертурб.  
(Т. поля на  
решетке)

### Неравновесные свойства

Сильно-неравновесные?

Слабо-неравновесные -  
Транспорт

- теория мгновенного  
отклика

- кинетическая теория  
(пертурб. метод)

Непертурб.  
подход -

- голография

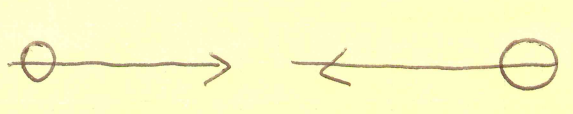
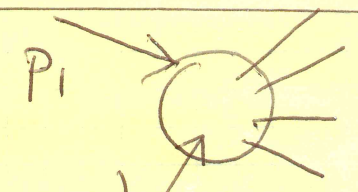
# Физика кварк-глюонной плазмы

## 1. Эксперименты и феноменология

SPS CERN	1980-90 гг.	$\sqrt{s} \sim 17 \text{ ТэВ/циклон}$
AGS BNL	1990 гг.	$\sqrt{s} \sim 5 \text{ ТэВ/н}$
RHIC BNL	2000 -	$\sqrt{s} \sim 200 \text{ ТэВ/н}$
LHC CERN	2010 -	$\sqrt{s} \sim 2.76 \text{ ТэВ/н}$
NICA Дубна	2020 -	$\sqrt{s} \sim 11 \text{ ТэВ/н}$
FAIR Darmstadt	2025 -	$\sqrt{s} \sim 5 \text{ ТэВ/н}$

Напоминание:

$$s = (p_1 + p_2)^2$$



(Lab frame = CMF)

$$p_1 = \left( \frac{\epsilon_1}{c}, \vec{p} \right)$$

$$p_2 = \left( \frac{\epsilon_2}{c}, -\vec{p} \right)$$

$$\sum \vec{p}_i = 0$$

$$s = \left( \frac{\epsilon_1 + \epsilon_2}{c} \right)^2, \text{ т.е. } \sqrt{s} = \epsilon_{\text{TOT}} / c$$

$$\epsilon_{\text{TOT}} = \epsilon_1 + \epsilon_2.$$

$s, t, u$  - переменные Мандельштама  
(S. Mandelstam)

Столкновения тяжелых ионов: <sup>197</sup>Au  
или <sup>207</sup>Pb (и других).  
82

I-4

$$1 \text{ fm} = 10^{-13} \text{ cm}$$

Очень грубая оценка плотности энергии

$$\text{RHIC: } \epsilon \sim 200 \frac{\text{ГэВ}}{\text{н}} \cdot 200 \text{ н} \sim 40 \cdot 10^3 \text{ ГэВ}$$

$$R_{Au} \sim 7 \text{ фм}$$

$$\epsilon \sim \frac{E}{V_3} \sim \frac{40000 \text{ ГэВ}}{\frac{4}{3} \pi 7^3 \text{ фм}^3} \sim 30 \frac{\text{ГэВ}}{\text{фм}^3}$$

Более точные оценки:  $\epsilon \sim 5 \text{ ГэВ}/\text{фм}^3$

$$\epsilon > \epsilon_c$$

Это выше критической плотности энергии, соотв. переходу адронизации - КГП (плавление адронов),  $\epsilon_c \sim 1 \text{ ГэВ}/\text{фм}^3$  (миним.)

Теоретическое описание столкновений тяжелых ионов высоких энергий

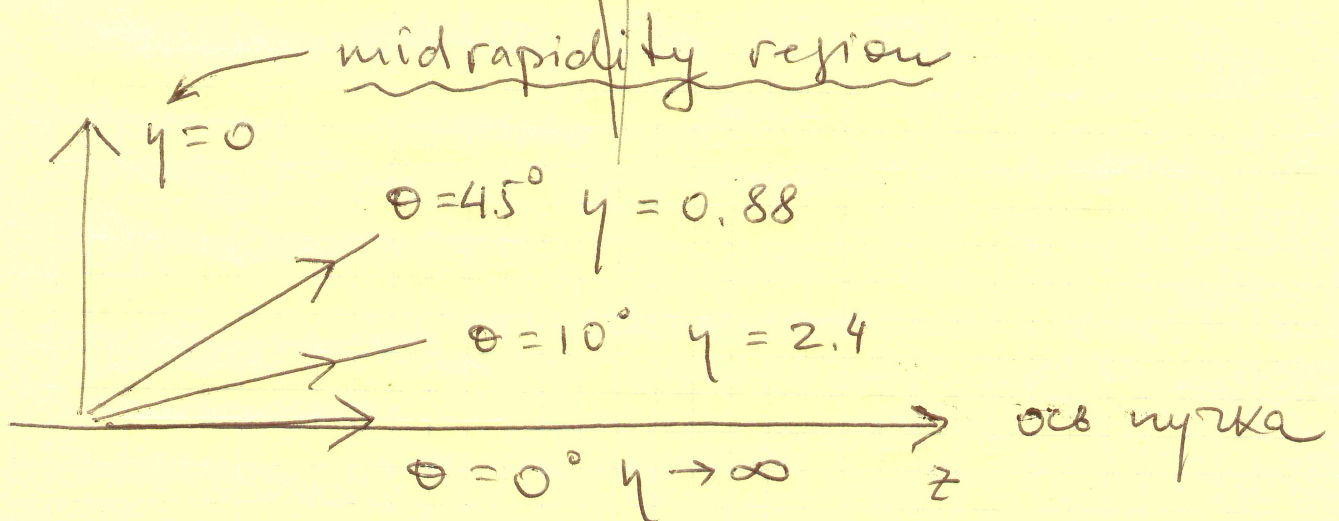
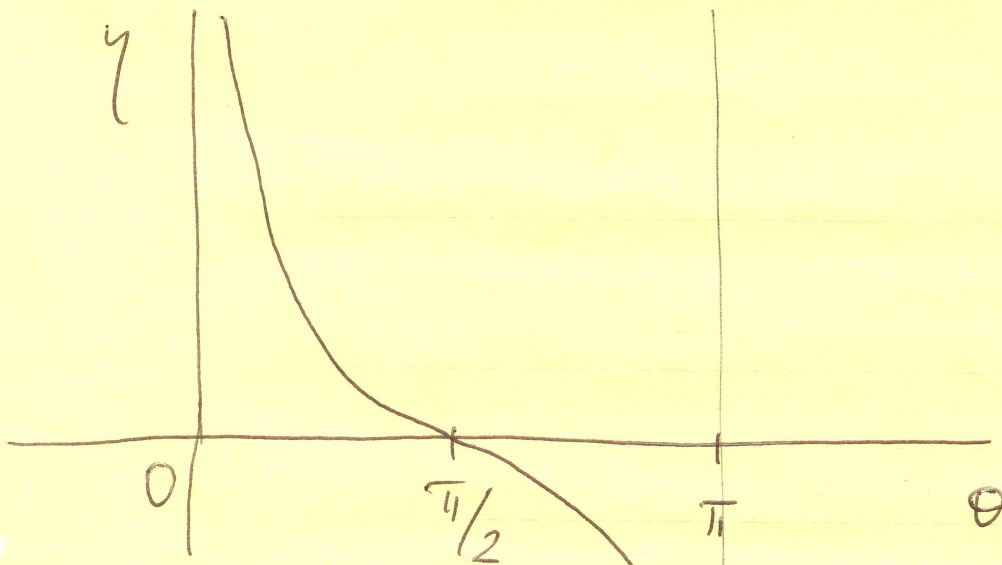
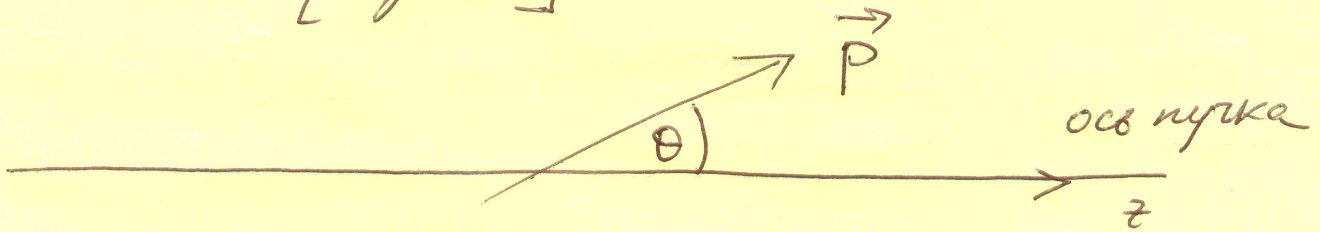
- 1) Fermi 1950-51
  - 2) Ландау 1953
  - 2) Ландау, Беленский 1955
  - 3) Bjorken 1983
  - 4) Соврем. обзор: Romatschke and Romatschke 2018
- } Сб. трудов Ландау, т. 2.

I-5 Некоторые физические наблюдаемые  
Сколько это куда и как летит?

Параметры:

- Псевдобыстрота (pseudorapidity)

$$\eta = -\ln \left[ \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} \right]$$



I-6 Упражнение (простое):

покажите, что 
$$\gamma = \frac{1}{2} \ln \frac{|\vec{p}| + p_{||}}{|\vec{p}| - p_{||}}$$
,

где  $p_{||} = p_z$  - компонента импульса вдоль оси пучка.

Замечание: для ультрарел. частиц  $|\vec{p}|/c \gg mc^2$ ,

т.е.  $\varepsilon \approx |\vec{p}|c$ . Тогда

$$\gamma \approx \gamma \equiv \frac{1}{2} \ln \frac{\varepsilon + p_{||}c}{\varepsilon - p_{||}c}$$

Эту величину ( $\gamma$ ) в физике частиц называют "быстротой" (rapidity), хотя на самом деле быстрая - это величина, определенная уравнением

$$\tanh w = \beta = |\vec{v}|/c \quad (*)$$

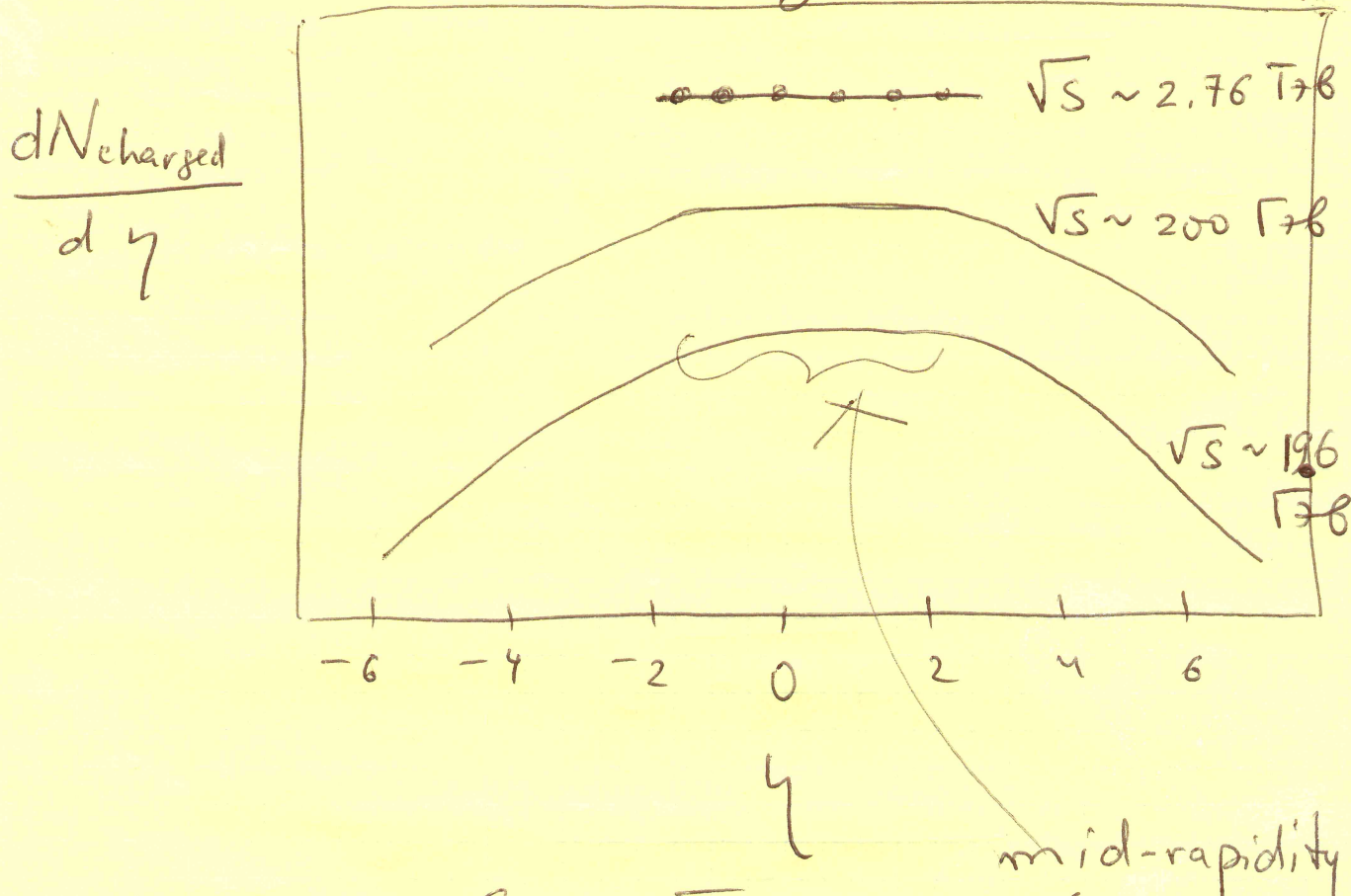
Упражнение: показать, что  $w$  - параметр псевдотрансформации метрики Минк., разобрать его свойства

т.о., 
$$w = \frac{1}{2} \ln \frac{\varepsilon + |\vec{p}|c}{\varepsilon - |\vec{p}|c} \quad (**)$$

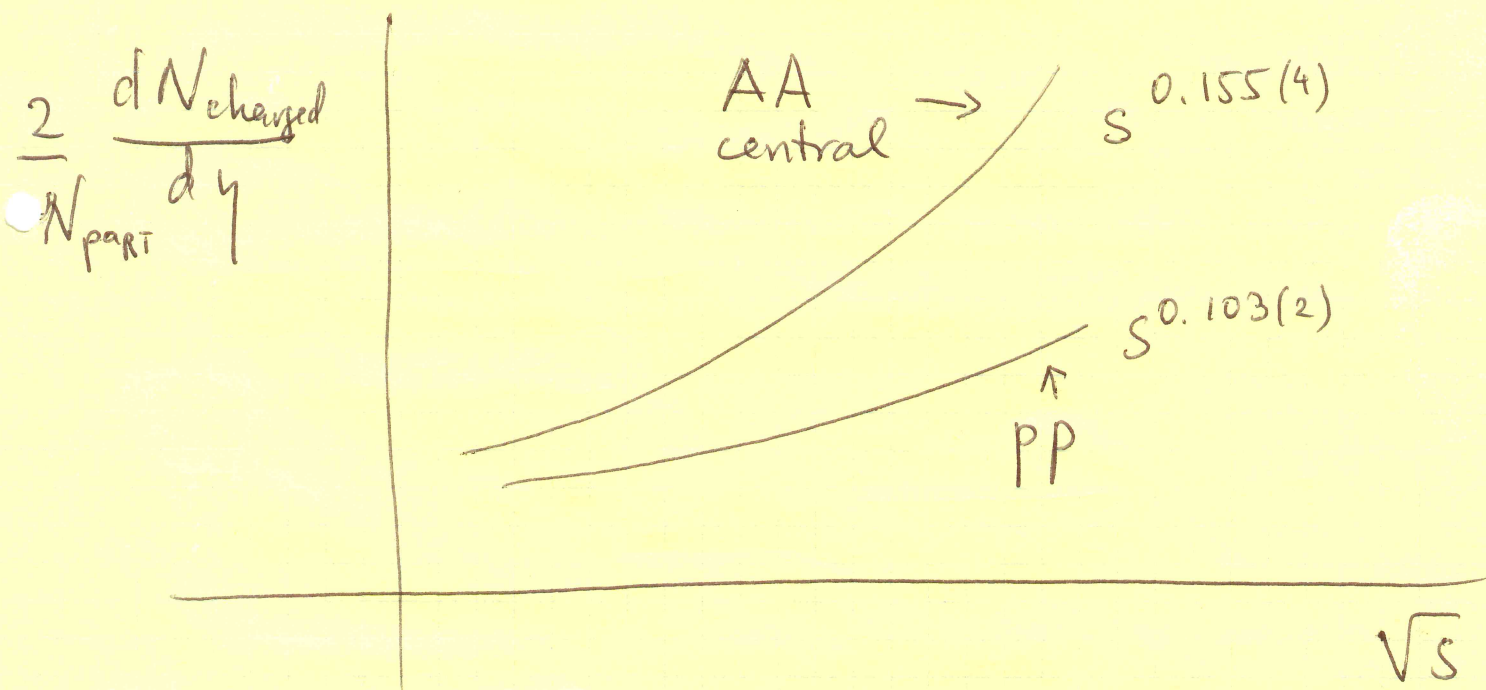
Упражнение: показать, что  $* \rightarrow **$ .

I-7

Типичный график в физике столкн. тяжелых ионов выглядит так:



Еще один важный график (1512.06/09,



Число частиц как функция энергии столкн.

$|y| < 0.5$

$$N \sim S^{\alpha} ; \alpha \approx 0.155(4)$$



I-8

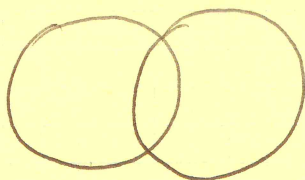
Теоретические предсказания:

$\alpha = 0.25$  (Лаузау, 1953)

$\alpha = 0.33$  (Губсер++ , 2008)

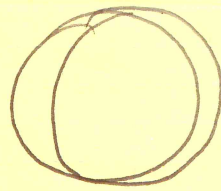
Вопрос не решен, попытки продолжались (Арефьева++ ...).

• Центральность:



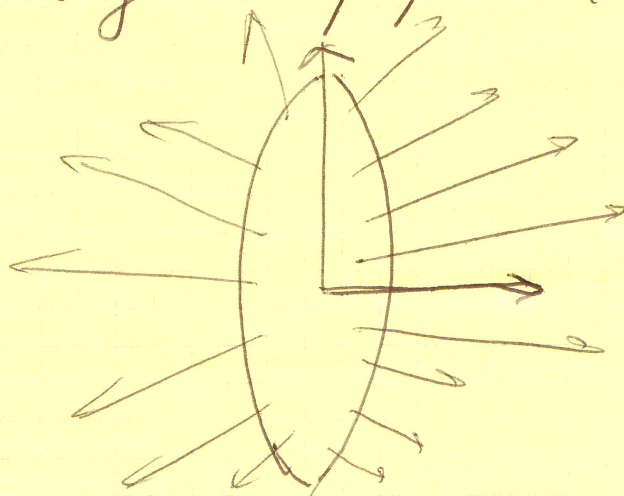
ось пучка:

⊗ beam into plane  
ось пучка



↑  
AA central

• В общем случае, нуклоны сталкиваются в геометрически анизотропном объеме миндалевидной формы (almond-shape)



⊗  
ось пучка

Это приводит к анизотропному распределению конических адронов по углу  $\varphi$  в плоскости,  $\perp$  направлению оси пучка.

Анизотропные потоки

$$\frac{dN_{\pm}}{\rho_{\pm} d\rho_{\pm} d\varphi dy} = \frac{dN_{\pm}}{\rho_{\pm} d\rho_{\pm} dy} \left( 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} v_n(\rho_{\pm}, y) \times \right.$$

$\pm$  - тип частиц ( $\pi^{\pm}$  etc)

$$\times \cos[n(\varphi - \Psi_n(\rho_{\pm}, y))]$$

$v_1, v_2, v_3, \dots$  : потоки (flows)

прямой, эллиптический, треугольный, ...

Значения  $v_n$  могут быть

а) определены экспериментально

б) вычислены (при определенных

предположениях) в рамках рел.  
гидродинамики КХФ

LHC, Pb+Pb @ 2.76 ТэВ, 30-40%  
central

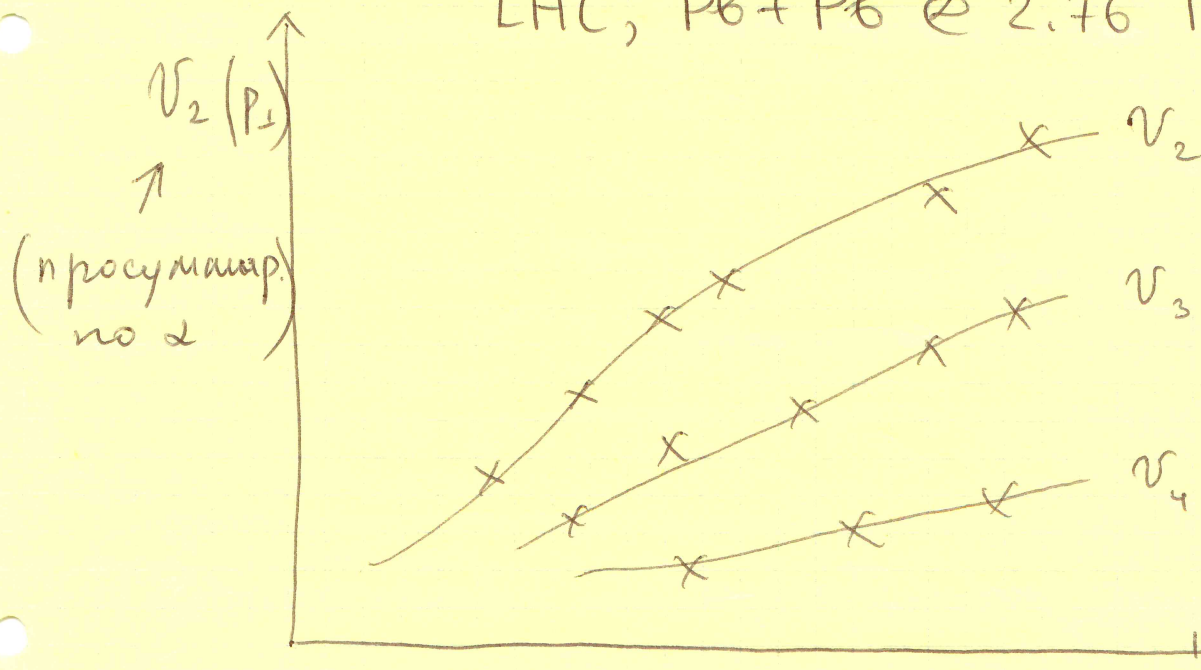


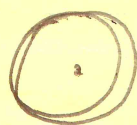
Fig. 5.3 in Romatschke - Romatschke  $P_{\pm}, \sqrt{s}$

# I-10 Комментарии:

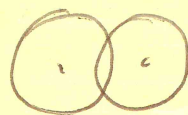
$$1) \nu_n (\alpha, P_T, y, b)$$

↑  
Тип частиц  
( $\pi^\pm, K^\pm$  etc)

↑  
присельный парам.



$b \sim 0$



$b \neq 0$

$\equiv$  центральность  
(centrality)

Центральность не определяется экспериментально, но она связана с множественностью коллизионных частиц (multiplicity), кот. максимальна при  $b=0$ , поэтому экстр. раннее время в триниях мном. частиц (30-40% centrality).

2) Теоретические значения для  $\nu_n$  даются численно решением рел. ур. Навье-Стокса с подстановками в них "руками" значениями кинематических коэффициентов и некот. групп уравнений состоящих  $P=P(t)$  параметров. Число этих "произвольных" параметров меньше, чем число ф.д. величин, т.е. речь не идет о простом подгонке под результат.

I-11 3) Таким путем можно определить отношение скорости вязкости  $\eta$  (не путать с псевдодвижимостью!) к плотности энергии  $s$  в зерновой материи:

$$\frac{\eta}{s} = \frac{h}{4\pi k_B} (1.75 \pm 0.25) = 0.12 - 0.16 \frac{h}{k_B}$$

Можно ли предсказать  $\eta/s$  теоретически?

Кинетич. теория:  $\eta \sim s T \tau$ ,

$$\tau \sim \tau_{\text{mfp}} \sim l_{\text{mfp}} \quad (c=1)$$

$$l_{\text{mfp}} \sim \frac{1}{n\sigma}$$

$$n \sim T^3$$

$$\sigma \sim \lambda_s^2 / T^2$$

$$l_{\text{mfp}} \sim \frac{1}{\lambda_s^2 T}$$

$$\Rightarrow \tau T \sim \frac{1}{\lambda_s^2}$$

$$\Rightarrow \eta/s \sim \frac{1}{\lambda_s^2} \gg 1 \quad \text{при } \lambda_s \ll 1,$$

где кин. теория применима.

Но у нас  $\lambda_s(T_{\text{кис}}) \sim 1$ . Нужны новые методы для вычисления гранич. коэфф. в режиме сильной связи (непертурбат.)

но даже для  $\lambda_s(T_{\text{кис}}) \sim 0.5$  это дает  $\eta/s \sim 4 \frac{h}{k_B}$ , т.е. в 25-30 раз больше наблюдаемого

I-12 Таким образом, для описания физики столкновений тяжелых ионов требуется понимание термодинамики и кинематики (транспортных свойств) КХД в режиме  $\alpha_s \sim 1$ .

### Термодинамика

$$\Omega = -T \ln Z_{\text{QCD}} = \Omega(T, \mu_B, \Lambda_{\text{QCD}}, m_q, N_c = 3).$$

$$Z = \text{tr} \hat{\rho}, \quad \hat{\rho} = e^{-\beta \hat{H} + \mu_2 \hat{Q}^2}$$

где  $\hat{Q}_2 = 0$  (сохр. заряд);  $Q_B = \frac{1}{3}(n_q - \bar{n}_q)$ .

Замечание: в перел. квант. статистике,

$$\hat{\rho}_{NR} = e^{-\beta \hat{H} + \mu \hat{N}}. \quad \text{В рел. системах}$$

(взаимодействующих) число частиц не сохраняется, но сохр. группа зарядов.

Замечание: в современной статмеханике популярна концепция обобщенного ансамбля Гиббса (GGE) и обобщенной термодинамики (Dyson) для систем

I-B с большим малом сохр.  $Q_2$

(или интегрируемых систем).

Термодинамика этих систем может быть  
детально изучена экспериментально,  
что стимулирует теор. интерес.

$$\Omega = \varepsilon - TS - \mu Q = F - \mu Q$$

$$P = - \frac{\partial \Omega}{\partial V} \Big|_{T, \mu} \quad S = - \frac{\partial \Omega}{\partial T} \Big|_{V, \mu}$$

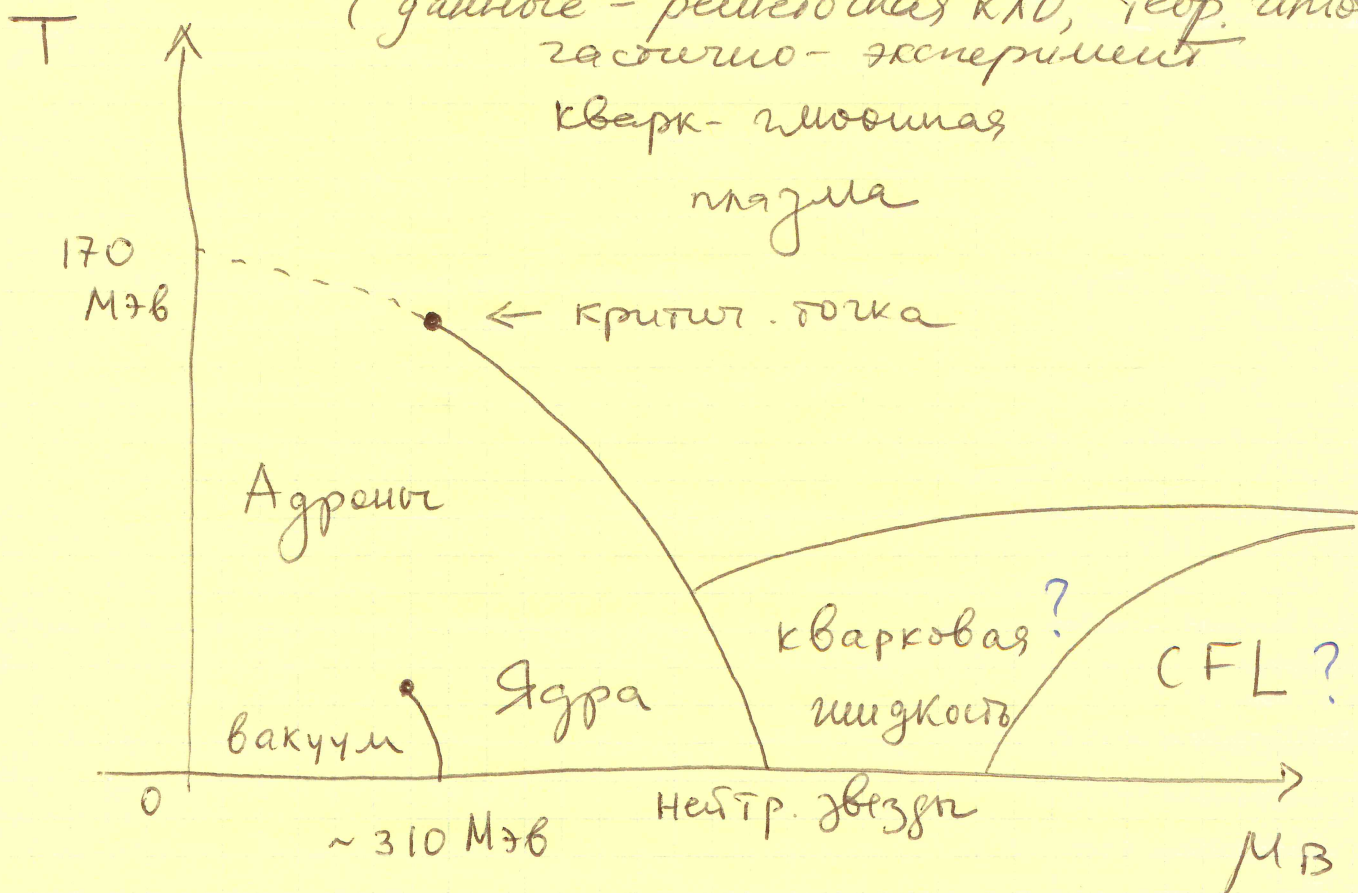
и т. д.

Фазовая диаграмма КХД

(данные - решеточная КХД, теор. и эксперим.)

частично - эксперимент

кварк-глюонная  
плазма



I-14

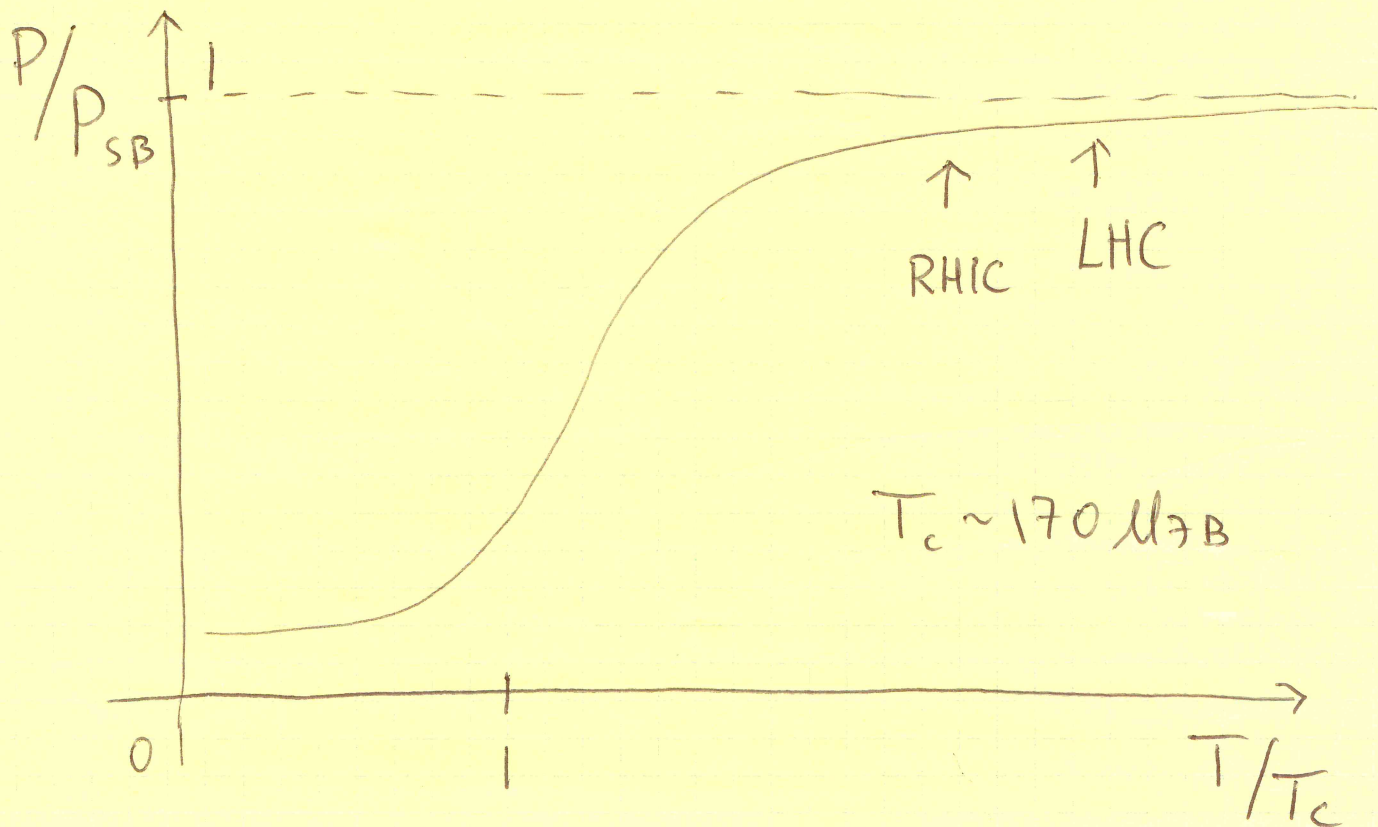
Два важных графика  
(источник - КХД на решетке)

График 1: давление в КХД

Замечание: все ТД величины  
вычисляются по  $Z = \text{tr} e^{-\beta \tilde{H} + \mu Q}$ ,  
при этом используется представление  $Z$   
в виде функц. интеграла. Т.е. „точкой  
ввода“ является

$$L_{\text{QCD}} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^a F_a^{\mu\nu} + \bar{\psi} (i\gamma^\mu D_\mu - m) \psi$$

При сверхвысоких температурах - это  
„идеальный“ газ кварков и глюонов.



I-15 Замечание: аналогичный график можно построить и для плотности энергии  $\varepsilon$ .

$$P_{SB} = \frac{8\pi^2}{45} \left(1 + \frac{21}{32} N_f\right) T^4 + O(m^2 T^2)$$

Упражнение: вычислить  $P_{SB}$  для реп. идеального газа  $N_f$  массивных кварков и  $N_c^2 - 1$  глюонов, исходя из формул квантовой статистики (напр., Ландау - Л., т. V)

Замечание:  $P/P_{SB} \sim 1$  при  $T/T_c \sim 10^3$ , в то время как  $T_{\text{кис, лис}}/T_c \sim 2-4$ . Однако,  $P/P_{SB} (T \sim T_{\text{кис, лис}}) \sim 0.75-0.8$  (ошибка  $\sim 20\%$ , а не в 25 раз, как в случае  $\gamma/s$ ). Это наводит на мысль, что транспортное коэффциент более чувствителен к зависимости от  $\alpha_s$ , чем термодинамический.



I-16

График 2: координатная аномалия  
как функция температуры

Напомним: классиф.  $T^{\mu\nu}$  (Noether)

$\hat{T}^{\mu\nu}$  оператор тензора энергии-импульса  
(см курс КТП)

$\langle \hat{T}^{\mu\nu} \rangle_{vac} = 0$  (испорируя гравитацию, косм. пост. и т.д. —  
— см Birrell-Davies)

В общих многочастичных неравновесных состояниях

$\langle \hat{T}^{\mu\nu} \rangle \equiv T^{\mu\nu}(t, \bar{x})$  — нестрив. функция

В равновесном сост:

$$\langle \hat{T}^{\mu\nu} \rangle_{T, \mu} = \text{tr}(\rho \hat{T}^{\mu\nu}) = T_{eq}^{\mu\nu}$$

$$T_{eq}^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \epsilon & & 0 \\ & p & \\ 0 & & p \end{pmatrix}$$

для однородной изотропной среды  
(напр., фотогаз): см Ландау-Лиф  
в системе покоя этой среды.

I-17 Упражнение: показать, что в системе отсчета, по отнош. к кот. среда движ. с 4-скор.  $u^\mu = (\gamma c, \gamma \vec{v})$ ,  $c=1$ ,  $T^{\mu\nu}$  имеет вид

$$T^{\mu\nu} = T_0^{\mu\nu} = P \gamma^{\mu\nu} + (P + \epsilon) u^\mu u^\nu$$

при  $u^\mu = \text{const} (!)$   $\gamma_{\mu\nu} = \text{diag}(-, +, +, +)$

Сделать это 2-мя способами - явно, используя  $T^{\lambda\mu} = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\lambda} \frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\rho} T^{\lambda\rho}$ ,

и неявно, используя симметрии и инварианты  $\gamma^{\mu\nu}$ ,  $u^\mu$ .

Замечание:

При  $u^\mu = u^\mu(x)$  формулу необходимо обобщить, (Заметим, что включив градиенты скорости  $u^\mu(x)$ ,

$$T^{\mu\nu} = P \Delta^{\mu\nu} + \epsilon u^\mu u^\nu, \text{ где}$$

$$\Delta^{\mu\nu} \equiv \gamma^{\mu\nu} + u^\mu u^\nu, \quad u_\mu \Delta^{\mu\nu} = 0,$$

т.е.  $\Delta^{\mu\nu}$  - проектор на напр.  $u^\mu$ ,

$$\text{т.е. } A = A_{\parallel} + A_{\perp}, \quad u \cdot A_{\perp} = 0,$$

если  $A_{\perp}$  содержит  $\Delta^{\mu\nu}$ .

I-18 Заметим, что  $\Delta_{\mu\nu} \Delta^{\nu\sigma} = \Delta_{\mu\sigma}$ .

При данном  $u^M(x)$ ,  $T^{\mu\nu}$  можно разбить на продольную и поперечную части

$$T^{\mu\nu} = \underbrace{\epsilon u^{\mu} u^{\nu}}_{\parallel} + \underbrace{\rho \Delta^{\mu\nu}}_{\perp} + t^{\mu\nu}, \text{ где}$$

$$t_{\mu\nu} = \frac{1}{2} (\Delta_{\mu\alpha} \Delta_{\nu\beta} + \Delta_{\nu\alpha} \Delta_{\mu\beta} - \frac{2}{d} \Delta_{\mu\nu} \Delta_{\alpha\beta}) \overset{\alpha}{T}$$

$t_{\mu\nu}$ : поперечный, бесследный,  $t^{\mu}_{\mu} = 0$ .

$$T^{\mu\nu} = \epsilon u^{\mu} u^{\nu} + \rho \Delta^{\mu\nu} -$$

$$- \gamma \Delta^{\mu\alpha} \Delta^{\nu\beta} (\partial_{\alpha} u_{\beta} + \partial_{\beta} u_{\alpha} - \frac{2}{d} \gamma_{\alpha\beta} \partial_{\lambda} u^{\lambda}) -$$

$$- \zeta \Delta^{\mu\nu} \partial_{\lambda} u^{\lambda} + O(\partial^2) = T_0^{\mu\nu} + T_1^{\mu\nu} + \dots$$

в штрихточке 1 порядка.

В общем случае,

$$T^{\mu\nu} = T_0^{\mu\nu} + T_1^{\mu\nu} + \dots$$

- градиентное разложение.

Коэффициенты  $\gamma, \zeta$  - сдвиговая и  
вторая (объемная) вязкости (shear and bulk)  
visc.

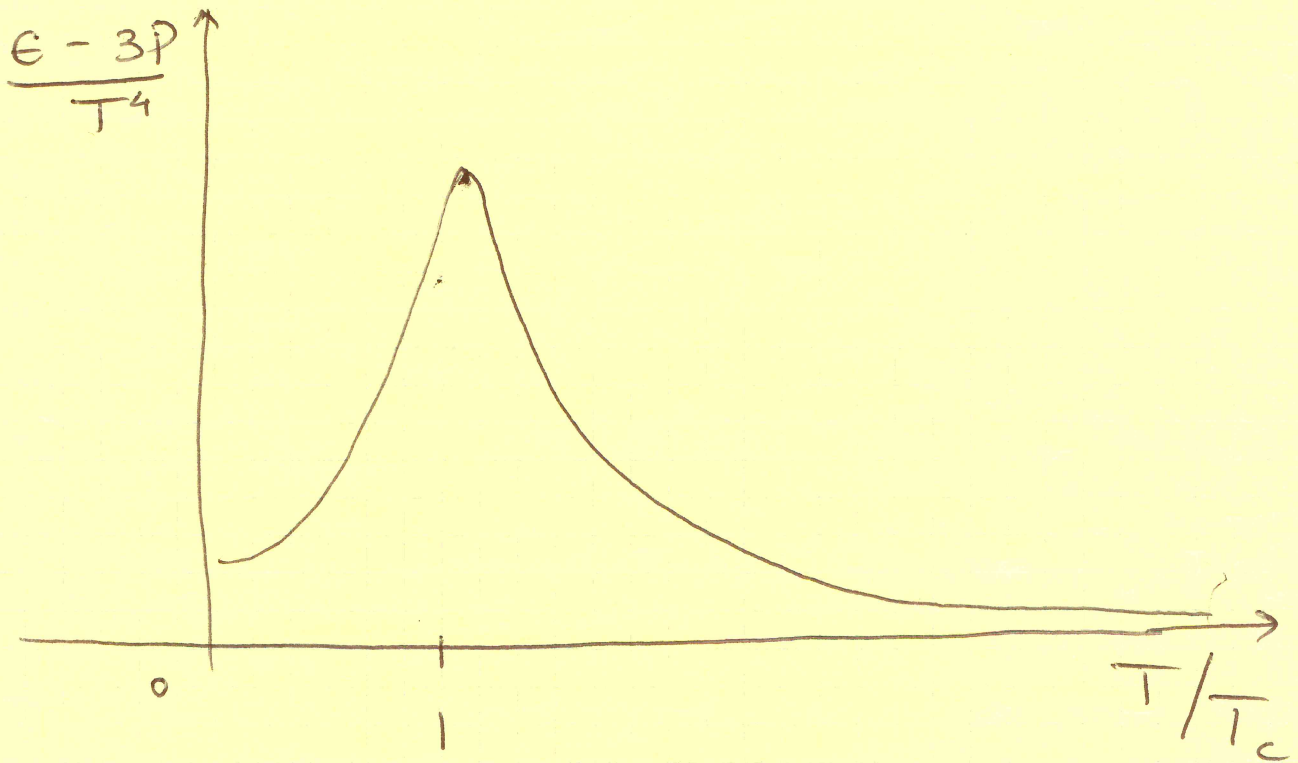
$$T_{eq \mu}^M = 3P - \epsilon$$

I-19 Для идеального газа (т.е. при  $T \gg T_c$ )

$$T_{eq \mu}^M = 0$$

Упражнение: покажите это.

График 2 (источник - КХД на решетке)



Замечание:  $T_{eq \mu}^M = 0$  (и вообще  $T_{\mu}^M = 0$ )  
в CFT (конф. т. п.) при любой конст.  
связи.

Действительно, для CFT при  $T \neq 0$   
 $T$  - естественная шкала (размерная)

Плотн. энтропии: CFT<sub>d</sub>

$$\text{I-20} \quad s = S/V_{d-1} = a f(\lambda) T^{d-1}$$

$\lambda$ : конст. связи,  $a$  - константа.

Например, в  $\mathcal{N}=4$  SYM  $d=4$  при  $N_c \rightarrow \infty$

$$s = \frac{2\pi^2}{3} N_c^2 f(\lambda) T^3 + O(1)$$

$$f(\lambda) = \begin{cases} 1 - \frac{3}{2\pi^2} \lambda + \dots & \lambda \ll 1 \\ \frac{3}{4} + O(\lambda^{-3/2}) & \lambda \gg 1 \end{cases}$$

$$s = \frac{\partial \mathcal{P}}{\partial T} \Big|_{\mu} \Rightarrow \mathcal{P} = \frac{1}{d} a f(\lambda) T^d$$

$$\Rightarrow \mathcal{F} = -pV = \mathcal{E} - TS \Rightarrow \mathcal{E} = TS - \mathcal{P}$$

$$\Rightarrow \mathcal{E} = \frac{d-1}{d} a f(\lambda) T^d = (d-1) \mathcal{P} =$$

$$= d_s \mathcal{P}.$$

Т.е. уравн. состояния CFT<sub>d</sub>:  $\mathcal{E} = (d-1) \mathcal{P}$

т.е.  $T^\mu_\mu = 0$ .

Задача: скорость звука в  $\text{CFT}_d$

I-21

$$v_s^2 = \frac{\partial P}{\partial \varepsilon} = \frac{1}{d-1} = \frac{1}{d_s}$$

$$d=4: v_s = 1/\sqrt{3} \quad (\text{т.е. } \frac{v_s}{c} = \frac{1}{\sqrt{3}})$$

Задача: в теориях с взаимодействием (напр.,  $\Lambda\text{QCD}$ ):

$$s = a T^{d-1} F(\Lambda/T),$$

где  $F \rightarrow 1$  при  $T/\Lambda \rightarrow \infty$ .